Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 24.05.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear ist:

(a) $F\colon C([0,1]) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_0^1 dx\, f(x)x^2$, wobei $C([0,1])$ als Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Skalarmultiplikation und Addition aufgefasst wird;

(b) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 - (x-y)^2$;

(c) $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x + 3y - 1$;

(d) $K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y| + |x+y|$.

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gibt mit $F(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, 4$ und

(a) $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (2,1,1)$, $v_3 = (0,1,1)$, $v_4 = (2,0,1)$,
$w_1 = (1,1,1,1)$, $w_2 = (1,0,1,0)$, $w_3 = (0,0,0,1)$, $w_4 = (2,1,2,1)$,

(b) v_i wie in (a),
$w_1 = (1,1,1,1)$, $w_2 = (1,1,1,0)$, $w_3 = (0,1,1,1)$, $w_4 = (2,1,1,0)$.

Aufgabe 3. Bezeichne V_n den komplexen Vektorraum aller Polynome $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ vom Grad kleiner gleich n und Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Wir definieren Abbildungen $D, T_a\colon V_n \to V_n$ durch

$$D(P) := P' = \frac{\partial}{\partial X}P \qquad \text{und} \qquad (T_aP)(x) := P(x+a) \text{ für ein festes } a \in \mathbb{C}.$$

Bestimme für diese Abbildungen jeweils (a) den Kern, (b) das Bild, (c) die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis $X^0, \dots, X^n$.

Aufgabe 4. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und definiere $F, G, H\colon M(2,\mathbb{R}) \to M(2,\mathbb{R})$ durch

$$F(X) = AX, \qquad G(X) = XA, \qquad H(X) = AX - XA \qquad \text{für alle } X \in M(2,\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie für jede dieser Abbildungen die Darstellungsmatrix bezüglich der Basis

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Dimension des Kerns.