Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 12**
Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Freitag, 08.06.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{C}) : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ (die *Quaternionen*).

(a) Sei $q = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$ und $\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $q \cdot \bar{q}$ und $\bar{q} \cdot q$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}^\times := \mathbb{H} \setminus \{0\}$ bezüglich der Matrixmultiplikation ein Gruppe ist, also $q \cdot q', q^{-1} \in \mathbb{H}^\times$ für alle $q, q' \in \mathbb{H}^\times$.

(c) Ist die Gruppe $\mathbb{H}^\times$ kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Inverse, falls es existiert, folgender Matrizen:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 3. (a) Bezeichne E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ *nilpotent* in dem Sinn, dass $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann die Matrix $E_n - A$ invertierbar ist. (*Hinweis:* Geometrische Reihe!)

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(der Eintrag an der Stelle (i, j) ist 0 im Fall $i > j$ und a^{j-i} im Fall $i \leq j$.)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $x \mapsto Ax$, bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ in beiden Vektorräumen $\mathbb{C}^3$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$