Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **SS 12**

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis Donnerstag, 14.06.12 bis 12 Uhr, in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ invertierbare Matrizen L, R so, dass $A = L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$.

Aufgabe 2. Wir betrachten $\mathbb{C}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt.

(a) Sei $u = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$ und $\|u\| = 1$ sowie $U = \operatorname{span}(u)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $P_U \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{C}^3$.

(b) Seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{C}^3$ zwei Untervektorräume und $U = U_1 + U_2$. Zeigen Sie, dass $P_U = P_{U_1} + P_{U_2}$ (als lineare Abbildungen von $\mathbb{C}^3$ nach $\mathbb{C}^3$) genau dann, wenn $U_1 \perp U_2$ (mit der Definition: $U_1 \perp U_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ für jeden Vektor $u_1 \in U_1$ gilt $u_1 \perp U_2$)

(c) Seien $u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von P_U bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 3. Wir betrachten $C([-1,1])$ als unitären Vektorraum, wobei

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} dx\, \overline{f(x)} g(x).$$

Die *Legendre-Polynome* sind gegeben durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren für die Polynome $1, x, x^2$, betrachtet als Elemente von $C([-1,1])$, die Polynome P_0, P_1, P_2 liefert.

(b) Sei $U = \operatorname{span}(1, x)$. Berechnen Sie $P_U(x^3)$ sowie $d(x^3, U)$.

Aufgabe 4. Wir betrachten $C([-\pi, \pi])$ als unitären Vektorraum, wobei

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, \overline{f(x)} g(x).$$

Seien $f, e_n \in C([-\pi, \pi])$ definiert durch

$$f(x) = x, \qquad e_n(x) := \mathrm{e}^{inx} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, x \in [-\pi, \pi].$$

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_n := \langle e_n, f \rangle$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\|f\|^2$ und überprüfen Sie direkt, dass $\|f\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$.