Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. Thomas Timmermann **SS 2016**

Probeklausur zur Mathematik für Physiker II

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an der 1. Klausur am 16.7.2016 sind erforderlich:
  - (1a) Eine Anmeldung im QISPOS zur 1. Klausur (Modulabschlußprüfung).
  - (2a) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1729 (M1) bzw. 1730 (M2). Letzer Termin für die Anmeldung ist der 14.7.2014. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
- Die Klausureinsicht für die 1. Klausur ist am 18.7.2016 von 10h15 bis 11h00 im Hörsaal AP (im Rahmen der üblichen Vorlesung).
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 26.9.2016 sind erforderlich:
  - (1b) Eine Anmeldung im QISPOS zur 2. Klausur (Modulabschlußprüfung). Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
  - (2b) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1731. Letzer Termin für die Anmeldung ist der 22.9.2016.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im SS 2014.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird am 14.7.2016 ab 10h15 im Hörsaal AP vorgerechnet.

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale (deren Konvergenz gegebenenfalls zu begründen ist):

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} dx\; x\cos x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 dx\; \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 dx\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{4^k}$

Aufgabe 2. Eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ habe bezüglich der Standardbasen $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die darstellende Matrix $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. Geben Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ von F bezüglich der Basen $\mathcal{A} := (v_1, v_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{B} := (w_1, w_2, w_3)$ von $\mathbb{R}^3$ an, mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{R}$ werde $f(x) := \cosh(ax)$ auf dem Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k) = \langle e_k, f\rangle$ in der Fourierreihe $(Sf)(x) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e_k, f\rangle e_k(x)$, wobei $e_k(x) := e^{\mathrm{i}kx}$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $\langle f, g\rangle := \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\; \overline{f(x)}g(x)$.

(b) Aus der Identität $f(x) = (Sf)(x)$ ergibt sich eine Formel für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$. Welche?

Aufgabe 4. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 4 & 12 & -4 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$ hat den Eigenwert 3. Bestimmen Sie die weiteren Eigenwerte von A sowie die Eigenräume zu *allen* Eigenwerten.

Aufgabe 5. Berechnen Sie die Matrix $\cos(A) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$ für $A = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3} & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6. Auf dem Vektorraum $P[x]$ der Polynome in $x \in \mathbb{R}_+$ mit reellen Koeffizienten werde durch $\langle p(x), q(x)\rangle := \displaystyle\int_0^1 dt\; t\cdot p(t)q(t)$ ein Skalarprodukt erklärt.

(a) Bestimmen Sie durch das Verfahren von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ von $U := \mathrm{span}(1, x)$.

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $P_U(x^2)$ sowie deren Länge $\|P_U(x^2)\|$.

(c) Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen x^2 und $P_U(x^2)$.