**Prof. Dr. R. Wulkenhaar** **SS 16**
**PD Dr. T. Timmermann**

## Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis **Mittwoch, den 04.05.16, 18 Uhr** in den Briefkästen Blatt 3

---

**Aufgabe 1.** (a) Berechnen Sie $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ mit Hilfe der Substitution $t = \sqrt{x}$.

(b) Berechnen Sie $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ mit Hilfe der Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ (vgl. Beispiel 31.13 der Vorlesung).

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \frac{\sin x}{1+\cos x} = \ln 2$;

(b) $\int_0^2 dx \frac{x}{\sqrt{1+4x}} = \frac{5}{6}$ (Substitution $t = \sqrt{1+4x}$);

(c) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (Substitution $x = 2\tan z$).

**Aufgabe 3.** Für $n \in \mathbb{N}$ und $|x| < \pi/2$ sei $D_n(x) = \int_0^x dt\, \tan^n t$. Zeigen Sie:

(a) $D_0(x) = x$, $D_1(x) = -\ln\cos x$ und $nD_{n+1}(x) = \tan^n x - nD_{n-1}(x)$ für $n \geq 2$. (*Hinweis:* Differenzieren Sie für die letzte Gleichung $\tan^n x$.)

(b) Für $d_n := D_n(\pi/4)$ gilt $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

(c) Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist

$$d_{2m} = (-1)^m \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right), \qquad d_{2m+1} = (-1)^m \left(\ln\sqrt{2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{2k}\right).$$

(d) Folgern Sie aus (b) und (c) die Gleichungen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

**Aufgabe 4.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{(a)} \int_1^\infty dx \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}, \qquad \text{(b)} \int_1^\infty dx \left(\ln\left(1+x^{-3}\right)\right)^\alpha, \qquad \text{(c)} \int_0^1 dx \left(\ln\left(1+x^{-3}\right)\right)^\alpha.$$

(*Hinweis:* Substituieren Sie geeignet und betrachten Sie $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$ für (a) und $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t^\beta}$ für geeignetes $\beta$ für (b) und (c).)