Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis **Donnerstag, den 12.05.16, 10 Uhr** in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob folgende uneigentliche Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Werte:

$$\text{(a)} \quad \int_0^\infty dx\, \mathrm{e}^{-zx}\,, \quad z \in \mathbb{C} \qquad \text{(b)} \quad \int_0^\infty dx\, \sin^n x\,, \quad n \geq 1 \qquad \text{(c)} \quad \int_0^\infty dx\, \frac{\ln x}{1+x^2}$$

(*Hinweis*: Betrachten Sie $\int_1^\infty dx\, \frac{\ln x}{1+x^2}$ mit der Substitution $x = \frac{1}{t}$.)

Aufgabe 2. Es sei $I := \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} dx\, \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}$.

(a) Substituieren Sie $x = \frac{y}{\sqrt{2}}$. In der Faktorisierung des Zählers $16 - y^8 = (2-y^2)(2+y^2)(2+2y+y^2)(2-2y+y^2)$ (nachrechnen!) kürzen sich einige Faktoren mit dem Nenner. Beweisen Sie: $I := 16 \displaystyle\int_0^1 dy \left(\frac{y}{4(y^2-2)} + \frac{2-y}{4(y^2-2y+2)} \right)$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Gleichung im Skript vor Beispiel 31.13.: $I = \pi$

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, daß für alle $k, m \in \mathbb{N}^\times$ und $c \in]0,1[$ gilt:

$$\int_0^c dx\, \frac{x^{k-1}}{1-x^m} = \sum_{n=0}^\infty \frac{c^{nm+k}}{nm+k}.$$

(b) In (a) wähle man $c = 1/\sqrt{2}$, $m = 8$ sowie $k = 1, 4, 5, 6$ und schließe mit (a) und Aufgabe 2 auf die *Bailey-Borwein-Plouffe-Formel* (*BBP-Formel*)

$$\pi = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right).$$

Aufgabe 4. (a) Seien $0 \leq k < 1$ und $x, c \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 1$. Zeigen Sie, daß das Integral

$$v(x,k) := \int_0^x dt\, \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}$$

auch für $|x| = 1$ existiert und für $E(\varphi, k) := v(\sin\varphi, k)$ mit $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ gilt:

$$E(\varphi,k) = \int_0^\varphi d\psi\, \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Reihe für $\sqrt{1-y}$ mit $y = k^2 \sin^2 \phi$ und gliedweiser Integration, daß für alle $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ und alle k mit $0 \leq k < 1$ gilt:

$$E(\varphi,k) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)}{2n-1} \binom{2n}{n} \left(\frac{k}{2}\right)^{2n} A_{2n}(\varphi) \quad \text{mit } A_{2n}(\varphi) = \int_0^\varphi dx\, \sin^{2n} x.$$