Prof. Dr. R. Wulkenhaar **SS 16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zu Mathematik für Physiker II

Abgabe: bis **Mittwoch, den 25.05.16, 18 Uhr** in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Die *Beta-Funktion* $B(a, b)$ ist für alle Zahlen $a, b > 0$ definiert durch $B(a, b) = \int_0^1 dx\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}$. Zeigen Sie:

(a) Das obige Integral konvergiert auch im Fall $0 < a, b < 1$.

(b) $B(a, b) = \dfrac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1)$ im Fall $b > 1$.

(c) $B(a, n) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{a(a+1) \cdots (a+n-1)}$ im Fall $b = n \in \mathbb{N}^\times$.

(d) $\displaystyle\int_0^1 dx\, x^{p-1}(1-x^m)^{q-1} = \frac{1}{m} B\left(\frac{p}{m}, q\right)$ für alle $p, q, m > 0$.

Aufgabe 2. Sei $b > 0$ und sei $\gamma(a)$ für $a > 0$ definiert durch

$$\gamma(a) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} B(a, b).$$

Zeigen Sie, daß die so definierte Funktion γ die Voraussetzungen des Satzes von Bohr-Mollerup erfüllt, und schlußfolgern Sie die Formel $\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a, b)$.
(*Hinweis:* Benutzen Sie die Hölder-Ungleichung.)

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie: $B(a, a) = \dfrac{1}{2^{2a-1}} B\left(\dfrac{1}{2}, a\right)$ für $a > 0$.
(*Hinweis:* Substitution $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{z})$.)

(b) Zeigen Sie mit (a) und Satz 35.4 den *Legendreschen Verdoppelungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

(a) $$\int_0^1 dx\, \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{für alle } p, n \in \mathbb{N},$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, (\sin x)^{a-1}(\cos x)^{b-1} = \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{2\Gamma(\frac{a+b}{2})} \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

(*Hinweis:* Finden Sie durch geeignete Substitution oder Rückwärtsrechnen die versteckte Beta-Funktion.)