

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 23.5.2017 bis 10h00 in den Briefkästen

Blatt 5

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie für alle drei Kurven  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  das Integral  $\int_{\gamma_k} z^2 dz$  mit

$$\gamma_k(t) = \begin{cases} t + it^2 & \text{für } k = 1 \\ t + it & \text{für } k = 2 \\ t + i\sqrt{t} & \text{für } k = 3. \end{cases}$$

Diskutieren Sie die Ergebnisse.

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie  $\int_{\gamma} z^n dz \forall n \in \mathbb{Z}$  mit der Kurve  $\gamma$  über den Einheitskreis  $\partial K_1(0)$  und der Parametrisierung  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto e^{i2\pi t}$ .

*Hinweis:* Der Fall  $n = -1$  unterscheidet sich stark von allen anderen, und  $n \geq 0$  kann (muß aber nicht) anders behandelt werden als  $n \leq -2$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$  eine geschlossene, glatt parametrisierte Kurve und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeigen Sie, daß dann das folgende Integral rein imaginär ist:

$$I := \int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz.$$

(*Hinweis:* Untersuchen Sie das Integral  $I + \overline{I}$ .)

**Aufgabe 4.** Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi,$$

indem Sie  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  berechnen mit der Parametrisierung  $\gamma : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto \frac{1+ti}{1-ti}$ .

*Hinweis:* Bestimmen Sie die Spur von  $\gamma$  und finden Sie eine andere Parametrisierung dieser Spur, in der Sie das Integral kennen.