Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 17**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Funktionentheorie

Abgabe: Dienstag, 30.5.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ sei holomorph und besitze eine Stammfunktion auf D. Weiter soll für alle $z \in D$ gelten $f(z) \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) Dann existiert eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(h(z))$.

(b) Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ eine holomorphe Funktion $H : D \to \mathbb{C}$ mit $H^n = f$.

Hinweis: Betrachten Sie die Stammfunktion von f'/f.

Aufgabe 2. Das Hookeche Kraftgesetz und das Newtonsche Gravitationsgesetz können durch eine komplexe Transformation ineinander überführt werden.
Sei $\gamma(t)$ eine Kurve, die in der komplexen Zahlenebene das Hookesche Kraftgesetz erfüllt

$$\frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} = -C\gamma, \tag{1}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ konstant ist. Dann erfüllt die Kurve $\eta(\tau(t)) := (\gamma(t))^2$ mit $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = |\gamma(t)|^2$ das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\tau^2} = -\tilde{C}\frac{\eta}{|\eta|^3}, \tag{2}$$

wobei $\tilde{C} = 2(|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}|^2 + C|\gamma|^2)$ ist.

(a) Zeigen Sie, daß $\tilde{C}$ tatsächlich konstant ist.

(b) Zeigen Sie, daß Gleichung (2) durch η erfüllt wird. (*Hinweis:* Berücksichtigen Sie die Kettenregel $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{|\gamma(t)|^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$)

Aufgabe 3. Sei $C = 1$. Bis auf einen globalen Faktor hat (1) die allgemeine Lösung $\gamma(t) = \varrho e^{\mathrm{i}t} + \frac{1}{\varrho}e^{-\mathrm{i}t}$ mit $\varrho \in \mathbb{R}$, wobei wir $\varrho > 1$ annehmen.

(a) Zeigen Sie, daß $\gamma(t)$ eine Ellipsenbewegung beschreibt, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt, und geben Sie die Länge der großen und kleinen Halbachse a bzw. b an.

(b) Berechnen Sie $\eta(t)$ aus $\gamma(t)$ und zeigen Sie, daß es sich ebenfalls um eine Ellipse handelt, wobei nun einer der Brennpunkte im Ursprung liegt.

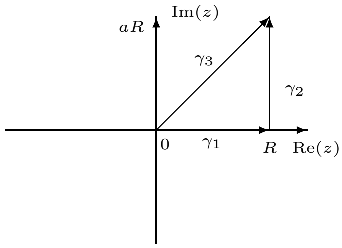
Bemerkung: Für den Abstand e zwischen Brennpunkt und Mittelpunkt der Ellipse gilt $e^2 = a^2 - b^2$. Aufgabe 2+3 beweisen das Newtonsche Gravitationsgesetz aus dem vorher bekannten Hookeschen Kraftgesetz und den Keplerschen Gesetzen.

Aufgabe 4. (a) Zeige Sie für $a \in \mathbb{R}, |a| \leq 1$ das folgende Integral

$$\int_0^\infty e^{-(1+\mathrm{i}a)^2 t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \frac{1-\mathrm{i}a}{1+a^2} \sqrt{\pi}.$$

Konstruieren Sie dafür ein Dreieck in der komplexen Ebene und nehmen Sie den Limes $\lim_{R\to\infty}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion e^{-z^2}. Finden Sie Parametrisierungen für γ_1, γ_2, nutzen Sie $\gamma_3 : [0, R] \to \mathbb{C}, t \mapsto (1 + \mathrm{i}a)t$ und die Lösung des Integrals $\int_0^\infty e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.



(b) Folgern Sie $\int_0^\infty \cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.