

## Probeklausur zur Vorlesung Funktionentheorie

---

Vorbemerkungen:

- Die Klausur gibt es in den Varianten dreistündig (8h15-10h45, M3) und zweistündig (8h15-9h45, M4). Die zweistündige Klausur wird einen geringeren Umfang haben als die Probeklausur.
- Zur Teilnahme an der Klausur am 28.7.2017 sind erforderlich:
  - (1a) Eine Anmeldung im QISPOS zur Klausur.
  - (2a) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1765 für die dreistündige Klausur im M3 und unter id 1766 für die zweistündige Klausur im M4. Letzter Termin für die Anmeldung ist der 26.7.2017.
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 6.10.2017, 8h15-10h45 Uhr, M4, sind erforderlich:
  - (1b) Eine Anmeldung im QISPOS zur 2. Klausur. Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
  - (2b) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1767. Letzter Termin für die Anmeldung ist der 4.10.2017. Die Klausur wird in nur einem Hörsaal geschrieben mit früherer Abgabe der zweistündigen Klausur.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelefone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Die Probeklausur wird in der Vorlesung am 21.7. vorgerechnet. Am 25.7. gibt es keine Vorlesung mehr, die Übungen am 24.7. finden aber noch statt.
- Die Klausurergebnisse sollten am Abend des 28.7.2017 vorliegen. Die Klausureinsicht findet in der Woche vom 31.7. bis 4.8. statt. Genaueres wird auf der Internetseite bekanntgegeben.

**Aufgabe 1.** Geben Sie folgende Zahlen an:

- (a)  $\operatorname{Re}(2^{x+iy})$
- (b)  $i^i$ , wenn die Potenz mit dem Hauptzweig des komplexen Logarithmus gebildet wird
- (c)  $\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2+3i)^n}\right)$
- (d) alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $z^2 = i$
- (e) alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $e^z = -1$
- (f)  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

**Aufgabe 2.** (a) Geben Sie möglichst drei verschiedene, aber äquivalente, Definitionen bzw. Kriterien dafür an, daß eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen.

- (b) Bestimmen Sie alle  $a, b \in \mathbb{R}$  derart, daß  $u(x, y) = \cos(ax) \sinh(by)$  Realteil einer holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist, d.h.  $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$  mit  $z = x + iy$ . Geben Sie, wenn es eine Lösung für  $f$  gibt, auch jeweils alle möglichen  $f$  an.

**Aufgabe 3.** (a) Sei  $M > 0$ . Bestimmen Sie alle ganzen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $|f(z)| \leq M|\sin z|$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

- (b) Bestimmen Sie alle in einer Umgebung von  $\frac{2}{3}$  holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f\left(\frac{1+2n}{1+3n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Wo liegen die Pole der meromorphen Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{C}$ ?

**Aufgabe 4.** Berechnen Sie:

- (a)  $\int_{\partial K_4(0)} \frac{dz}{\sin z - \cos z}$
- (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\sin x}{(x^2 + 4x + 5)^2}$
- (c)  $\int_0^{\infty} dx \frac{\sqrt{x}}{x^2 + y}$  als Funktion von  $y > 0$

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie:  $f(z) = z^5 + 5z^3 + 1$  hat 3 Nullstellen in  $K_1(0)$ , 5 Nullstellen in  $K_3(0)$  und keine Nullstelle im Kreisring  $K_{1,2}(0)$ .