Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 17.5.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie: $B(a,a) = \dfrac{1}{2^{2a-1}} B\left(\dfrac{1}{2}, a\right)$ für $a > 0$.
(*Hinweis:* Substitution $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{z})$.)

(b) Zeigen Sie mit (a) und Satz 36.4 den *Legendreschen Verdoppelungssatz*

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a)
$$\int_0^1 dx\, \frac{x^{p-1}}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{n}\right)}{n\Gamma\left(\frac{p}{n} + \frac{1}{2}\right)} \quad \text{für alle } p, n \in \mathbb{N},$$

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\, (\sin x)^{a-1}(\cos x)^{b-1} = \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{b}{2})}{2\Gamma(\frac{a+b}{2})} \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

(*Hinweis:* Finden Sie durch geeignete Substitution oder Rückwärtsrechnen die versteckte Beta-Funktion.)

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit Hilfe der Formel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ und einer Potenzreihen-Entwicklung des Integranden das Integral $\displaystyle\int_0^1 dx\, \frac{\ln(1+x)}{x}$.
(*Hinweis:* Die Potenzreihe des Integranden konvergiert nur auf $[0,1[$. Betrachten Sie deswegen zunächst das Integral über ein Intervall $[a,b]$ mit $0 < a < b < 1$.)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen linear ist:

(a) $F\colon C([0,1]) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_0^1 dx\, f(x)x^2$, wobei $C([0,1])$ als Vektorraum bezüglich der punktweise definierten Skalarmultiplikation und Addition aufgefaßt wird;

(b) $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x+y)^2 - (x-y)^2$;

(c) $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 2x + 3y - 1$;

(d) $K\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto |x-y| + |x+y|$.