Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 7.6.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Es sei $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ die darstellende Matrix der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$ und der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3. (a) Bezeichne E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ *nilpotent* in dem Sinn, dass $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann die Matrix $1_n - A$ invertierbar ist. (*Hinweis:* Geometrische Reihe!)

(b) Sei $a \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie das Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & a^n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (der Eintrag an der Stelle (i,j) ist 0 im Fall $i > j$ und a^{j-i} im Fall $i \leq j$.)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

ein $r \in \mathbb{N}$ und quadratische Matrizen L, R, so daß

$$A = L \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}.$$