**Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar**
**Alexander Hock** **SS 18**

## Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 14.6.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 8

---

**Aufgabe 1.** Wir betrachten $\mathbb{C}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt und fassen Projektionen $P_U : \mathbb{C}^3 \to U$ für Untervektorräume $U \subseteq \mathbb{C}^3$ als Abbildungen $P_U : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ auf.

(a) Sei $u = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3$ und $\|u\| = 1$ sowie $U = \operatorname{span}(u)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $P_U \colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{C}^3$.

(b) Seien $u_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ und $U = \operatorname{span}(u_1, u_2)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $P_U : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ bezüglich der Standard-Basis von $\mathbb{C}^3$.

(c) Bestimmen Sie den Abstand von $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu $U$.

**Aufgabe 2.** Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ und $x, y \in \mathbb{R}^3$ werde durch $\langle x, y\rangle_A := \langle x, Ay\rangle$ ein neues Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie durch das Verfahren von Gram-Schmidt bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$ eine Orthonormalbasis von $U := \operatorname{span}(v_1, v_2)$ mit $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Bestimmen Sie bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$ das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U$ in $\mathbb{R}^3$.

(c) Berechnen Sie bezüglich des Skalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle_A$ den Abstand des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu $U$.

**Aufgabe 3.** Das *Kreuzprodukt* $v \times w$ zweier Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$ im $\mathbb{R}^3$ ist der Vektor

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $u, v, w, x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

(a) $v \times w$ ist orthogonal zu $v$ und $w$.

(b) $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$.

(c) $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin\alpha$, wobei $\alpha$ den (kleineren) Winkel zwischen $v$ und $w$ bezeichne.

(d) Der Abstand zweier windschiefer Geraden $u + \mathbb{R}x$ und $v + \mathbb{R}y$ ist gegeben durch $|\langle u - v, x \times y\rangle| / \|x \times y\|$.

**Aufgabe 4.** Wir betrachten $\mathcal{C}([-1,1])$ als unitären Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} dx\, \overline{f(x)}g(x).$$

Die *Legendre-Polynome* sind gegeben durch

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, daß das Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren für die Polynome $1, x, x^2$, betrachtet als Elemente von $\mathcal{C}([-1,1])$, die Polynome $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ liefert.

(b) Sei $U = \mathrm{span}(1, x)$. Berechnen Sie $P_U(x^3)$ sowie $d(x^3, U)$.