Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

SS 18

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker II

Abgabe: Donnerstag, 21.6.2018 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Wir betrachten $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ als unitären Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\,\overline{f(x)}g(x).$$

Seien $f, e_n \in \mathcal{C}([-\pi,\pi])$ definiert durch $f(x) = x$ und $e_n(x) := e^{inx}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $x \in [-\pi,\pi]$.

(a) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten $\hat{f}_n := \langle e_n, f\rangle$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Berechnen Sie $\|f\|^2$. Welche Gleichung für π^2 folgt aus der Gleichung $\|f\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2$.

Aufgabe 2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische und stückweise stetige Funktion, $\theta \in \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $g(x) = f(x-\theta)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen $\hat{f}(k)$ und $\hat{g}(k)$?

(b) Folgern Sie: Ist $\theta \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q}\pi)$ und $f = g$, so muß f konstant sein.

Aufgabe 3. Sei $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Fourier-Reihe von f hat dann die Gestalt

$$(Sf)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)).$$

Wie berechnen sich die Koeffizienten a_k, b_k aus den Fourier-Koeffizienten von f? Wie direkt aus f durch Integration?

(b) Was läßt sich über die Koeffizienten a_k und b_k aussagen, wenn f gerade oder ungerade ist?

Aufgabe 4. (a) Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung der Funktion $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$.

(b) Begründen Sie, daß $f(\pi) = (Sf)(\pi)$, und folgern Sie die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$