Westfälische Wilhelms-Universität Münster WS 2005/06
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

1. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Topologische Grundlagen)

Abgabe der Lösung bis Montag, 24.10.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

1. Aufgabe (5 Punkte)

Eine Teilmenge $\mathcal{O} \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) heißt offen, falls für jedes $x \in \mathcal{O}$ eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x)$ existiert, so daß $U_\epsilon(x) \subset \mathcal{O}$. Beweisen Sie, daß die so gewonnene Familie offener Teilmengen $\mathcal{T}$, die leere Menge $\emptyset$ hinzugenommen, den metrischen Raum (X, d) zu einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ macht.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Für eine reelle Zahl $p \geq 1$ ist durch

$$d_p(x, y) = \Big(|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p\Big)^{\frac{1}{p}} , \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, , \; y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

eine Metrik $d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ definiert [folgt aus Minkowskischer Ungleichung].

Skizzieren Sie die offenen Kugeln

$$U_{\epsilon,p}(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 \, , \quad d_p(x, y) < \epsilon\}$$

für $p = 1$ und $p = 2$. Wie würde diese Skizze für $p > 2$ aussehen? Finden Sie insbesondere den Grenzfall $p \to \infty$ und geben Sie $d_\infty(x, y)$ explizit an.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\mathcal{T}_p$ die durch die Metrik d_p induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^2$. Beweisen Sie, daß alle diese Topologien identisch sind.