Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

4. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"

(differenzierbare Mannigfaltigkeiten, Lie-Gruppen)

Abgabe der Lösung bis Montag, 14.11.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

11. Aufgabe (3 Punkte)

Diskutieren Sie das Hyperboloid $H^n_{(c)} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ,\ x^2_{n+1} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = c\}$ als Untermannigfaltigkeit. Welche Werte für c sind dabei erlaubt? Finden Sie möglichst einfache Karten für $H^{n+} = \{((x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+\ ,\ x^2_{n+1} - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ und skizzieren Sie H^{2+}.

12. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Mannigfaltigkeit der Lie-Gruppe $SL(2, \mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R})\ ,\ \det g = 1\}$ und der Lie-Gruppe $SO(2, \mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R})\ ,\ g^T g = I_{2\times 2}\ ,\ \det g = 1\}$. Hinweis: Eine sinnvolle Parametrisierung ist $g = \begin{pmatrix} x+w & -y+z \\ y+z & x-w \end{pmatrix}$.

13. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Mannigfaltigkeit der Lie-Gruppe $SU(2) = \{g \in M_2(\mathbb{C})\ ,\ g^* g = I_{2\times 2}\ ,\ \det g = 1\}$.

14. Aufgabe (8 Punkte)

Mit Hilfe der Pauli-Matrizen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ werde ein Vektorraum-Isomorphismus $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \{a \in M_2(\mathbb{C})\ ,\ a = a^*\ ,\ \mathrm{tr}(a) = 0\}$, $\sigma(x) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i x_i$ für $x = (x_1, x_2, x_3)$, zwischen dem dreidimensionalen Euklidischen Raum und dem Raum der spurfreien selbstadjungierten komplexen 2×2-Matrizen definiert.

Zeigen Sie, daß $u^* \sigma(x) u \in \sigma(\mathbb{R}^3)$ für $u \in SU(2)$. Bestimmen Sie die durch $u^* \sigma(x) u = \sigma(gx)$ definierte Transformationsmatrix $g \in M_3(\mathbb{R})$ sowie den Raum G aller dieser Matrizen.

Finden Sie den Kern der Abbildung $SU(2) \ni u \mapsto g \in G$, also jene Elemente $u \in SU(2)$, die auf das gleiche $g \in G$ abgebildet werden. Unter Verwendung von Aufgabe 13 ist G zu welcher Mannigfaltigkeit isomorph?