Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

5. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Tangentialraum, Tangentialbündel)

Abgabe der Lösung bis Montag, 21.11.2005, vor Vorlesungsbeginn im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

15. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $M = f^{-1}(0)$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+k}$ und $x \in M$. Zeigen Sie, daß $f'(x)v_x = 0$ gilt für jeden Tangentialvektor $v_x \in T_xM$.

16. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Tangentialräume T_eH im Einselement $e = I_{n\times n}$ der Lie-Untergruppen $H \in \{SL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{C}), O(n,\mathbb{R}), U(n), SU(n)\}$.

17. Aufgabe (7 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Das Exponential einer $n \times n$-Matrix $X \in M_n(\mathbb{K})$ ist gegeben durch $\mathrm{e}^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ mit $X^0 = I_{n\times n}$. Beweisen Sie zunächst die folgenden Eigenschaften für $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$:

1. Falls $XY = YX$, dann ist $\mathrm{e}^{X+Y} = \mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y$
2. $\exp((t+s)X) = \exp(tX)\exp(sX)$ für $t, s \in \mathbb{R}$
3. $(\mathrm{e}^X)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$
4. Falls Y invertierbar, dann ist $\mathrm{e}^{Y^{-1}XY} = Y^{-1}\mathrm{e}^X Y$
5. $\mathrm{e}^{(X^T)} = (\mathrm{e}^X)^T$ (transponierte Matrix)
6. $\mathrm{e}^{(X^*)} = (\mathrm{e}^X)^*$ (hermitesch konjugierte Matrix für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
7. $\det(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}$ (dabei ist det die Determinante und tr die Spur)

Hinweis zu 7: Für jede Matrix $X \in M_n(\mathbb{R})$ oder $X \in M_n(\mathbb{C})$ existiert eine invertierbare Matrix $Y \in M_n(\mathbb{C})$, so daß $Y^{-1}XY \in M_n(\mathbb{C})$ eine obere (komplexe) Dreiecksmatrix ist, d.h. alle Matrixelemente unterhalb der Diagonale sind Null.

Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 16, daß für die Lie-Untergruppen $H \in \{SL(n,\mathbb{R}), SL(n,\mathbb{R}), O(n,\mathbb{R}), U(n), SU(n)\}$ und $v_e \in T_eH$ sowie $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{e}^{tv_e} \in H$.

b.w.

18. Aufgabe (6 Punkte)

Das Möbius-Band ist der Raum $E = R/\sim$, wobei R das offene Rechteck $R = (-\pi, 2\pi) \times (-1, 1) \subset \mathbb{R}^2$ ist und $R \ni (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \in R$ falls $\{x_1 = x_2,\ y_1 = y_2\}$ oder $\{|x_1 - x_2| = 2\pi, y_1 = -y_2\}$.
Zeigen Sie, daß das Möbiusband E ein Vektorbündel mit Basismannigfaltigkeit S^1 und typischer Faser $\mathbb{R}^1$ ist. Geben Sie dazu die kanonische Projektion $\pi : E \to S^1$ und für eine Überdeckung der S^1 durch zwei Karten U_1, U_2 eine Trivialisierung $\chi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^1$ an und überprüfen Sie die Bündeleigenschaften (die Vektorraum-Struktur der Fasern ist nicht sehr natürlich). Bestimmen Sie für $t \in U_1 \cap U_2$ die Abbildung $g_{21}(t) = \chi_2|_{\pi^{-1}(t)}(\chi_1|_{\pi^{-1}(t)})^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.