Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Wulkenhaar / Dipl.-Math. R. Schmidt

WS 2005/06

6. Übungsblatt zur Vorlesung "Geometrie von Eichtheorien"
(Vektorfelder, Lie-Algebren)

Abgabe der Lösung bis Montag, 28.11.2005, im Briefkasten 79 des Übungsleiters.

---

19. Aufgabe (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $\phi_X : D \subset M \times \mathbb{R} \to M$ die durch ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ generierte einparametrige Gruppe von lokalen Diffeomorphismen und $\phi : M \to M$ ein lokaler Diffeomorphismus von M. Dann ist die durch $\phi_* X$ generierte einparametrige Gruppe von lokalen Diffeomorphismen $\phi_{\phi_* X}$ gegeben durch $\phi_{\phi_* X}(x,t) = \phi \circ \phi_X(\phi^{-1}(x), t)$.

20. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $x \in M = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für das durch $(Xf)(x) = x^2 \frac{\partial f}{\partial x}$ gegebene Vektorfeld die Integralkurve $\gamma_{x_0}(t)$ durch x_0 und das Intervall $I \ni t$, auf dem die Kurve definiert ist.

Sei $(x,y) \in M = \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie für das durch $(Xf)(x) = x^2 \frac{\partial f}{\partial y}$ gegebene Vektorfeld die Integralkurve $\gamma_{(x_0,y_0)}(t)$ durch (x_0, y_0) und das Intervall $I \ni t$, auf dem die Kurve definiert ist.

21. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\{b_i\}_{i=1}^n$ eine Vektorraum-Basis der Lie-Algebra einer Lie-Gruppe. Dann sind die Strukturkonstanten c^i_{jk} der Lie-Algebra bezüglich dieser Basis definiert durch $[b_j, b_k] = \sum_{i=1}^n c^i_{jk} b_i$. Schreiben Sie die Eigenschaften einer Lie-Algebra als Gleichungen für die Strukturkonstanten.
Geben Sie unter Verwendung der früheren Aufgabe 16 eine Basis der Lie-Algebren der Lie-Gruppen $O(3,\mathbb{R})$ und $SU(2)$ an und berechnen Sie die Strukturkonstanten.

22. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle 1- und 2-dimensionalen Lie-Algebren (bis auf Isomorphie) und geben Sie zu jeder dieser Lie-Algebren $\mathfrak{g}$ eine Lie-Gruppe G an, deren Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist.

Information: *Wegen Teilnahme an einem Workshop in Marokko werden die Vorlesungen vom 28.11. und 29.11. auf einen späteren Termin verschoben.*