**Prof. Dr. R. Wulkenhaar**
**Dr. R. Brüske** **WS 06/07**

# Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 2.11.06, bis 17h00 in den Briefkästen Blatt 2

---

**Aufgabe 1.** Sei $f : V \to V$ Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$ und $U \subset V$ Untervektorraum mit $f(U) \subset U$.
Zeige: $f$ diagonalisierbar $\Rightarrow f|_U$ diagonalisierbar.

**Aufgabe 2.** Seien $f, g : V \to V$ diagonalisierbare Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$, welche miteinander kommutieren, d.h. $f \circ g = g \circ f$. Zeige:

(a) Ist $\mathrm{Eig}(g;\lambda)$ Eigenraum von $g$ zum Eigenwert $\lambda$, so gilt $f(\mathrm{Eig}(g;\lambda)) \subset \mathrm{Eig}(g;\lambda)$.

(b) $f|_{\mathrm{Eig}(g;\lambda)}$ ist diagonalisierbar.

(c) Es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ von $V$, wobei die $b_i$ $(1 \le i \le n)$ sowohl Eigenvektoren von $f$ als auch von $g$ sind.

**Aufgabe 3.** Es sei $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Zeige:

(a) $A^{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$

(b) $A^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} a^{n+2} - b^{n+2} & a^{n+1} - b^{n+1} \\ a^{n+1} - b^{n+1} & a^n - b^n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}$

Tip: Diagonalisiere $A$.

**Aufgabe 4.** Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum, $x, y \in V$. Dann gilt:

(a) $\|x\| = \|y\| \iff \langle x - y, x + y\rangle = 0$.

(b) $\|x - y\| = \|x + y\| \iff \langle x, y\rangle = 0$.

(c) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff \langle x, y\rangle = 0$.

(d) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.