Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 06/07

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 07.12.06, bis 17h00 in den Briefkästen — Blatt 7

Aufgabe 1. Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $r > 0$, wenn gilt $f(tx) = t^r f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $t > 0$. Zeige:

f homogen vom Grad $r \iff rf(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j(\partial_j f)(x)$.

Aufgabe 2. Es seien $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3$ erklärt durch $f(t) = (t, t\sin t, t\cos t)$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ durch $g(x,y,z) := x^2 + y^2 - z^2$. Berechne $\Big(\frac{d}{dt}(g \circ f)\Big)(1)$.

Aufgabe 3. Die van der Waalssche Zustandsgleichung eines Gases lautet

$$p(v,T) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}\ .$$

Berechnen Sie $(\partial_1 p)(v,T)$ und $(\partial_1^2 p)(v,T)$ sowie den kritischen Punkt (v_k, T_k, p_k), der durch $(\partial_1 p)(v_k, T_k) = 0$ und $(\partial_1^2 p)(v_k, T_k) = 0$ definiert ist.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $f(x,y,z) = \cos z + \sin(xy)$

a) im Punkt $(0, \pi, \frac{\pi}{2})$ in Richtung $v = (\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{3}{5})$

b) im Punkt $(1, \pi, \frac{\pi}{2})$ in Richtung $v = (0,\ \frac{4}{5},\ \frac{3}{5})$

c) im Punkt $(\pi, 2, 1)$ in Richtung $v = (\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 0)$

d) im Punkt $(\pi, 0, 0)$ in Richtung $v = (0,\ -1,\ 0)$