

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Aufgabe 1. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{2007}$$

Aufgabe 2. Seien

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{gegeben durch } f(x, y) := (x^2 + y, x - y, x), \\ g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 && \text{gegeben durch } g(u, v, w) := (u^{10} - v, u^5 + v^5). \end{aligned}$$

Berechne $(D(g \circ f))(0, 1)$.

Aufgabe 3. Sei $\delta > 0$ fest. Bestimme das globale Minimum von $x^2 + y^2 + (\delta - x - y)^2$ auf \mathbb{R}^2 .

Aufgabe 4. Man bestimme alle Extrema von

$$x^4 + y^4 + z^4 \quad \text{auf} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Aufgabe 5. Sei $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ und $I(\alpha, \beta) := \int_0^\infty dx e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}$.

Zeige:

a) $\left(\frac{\partial}{\partial \beta} I\right)(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$

b) $\int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 6. Berechne das Trägheitsmoment des Kugeloktanten

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

bzgl. der z -Achse als Drehachse.