Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 07/08**
Dr. R. Brüske

Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Die Klausur wird aus drei Teilen bestehen:

- Teil A (20%), den es in der Probeklausur nicht gibt, besteht aus wahren und falschen Aussagen, die entsprechend als wahr oder falsch anzukreuzen sind. Positive Punkte gibt es ab einem Minimum richtiger Antworten. Es gibt keine Minuspunkte.
- Teil B (40%) sind Rechenaufgaben.
- Teil C (40%) sind Beweise.

Als Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) zulässig. Zum Bestehen der Klausur sind 40% der Gesamtpunktzahl erforderlich.

Teil B

Aufgabe 1. Man bestimme, falls existent, die Grenzwerte

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k \qquad\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}(\sqrt{1+x}-1)$$

Aufgabe 2. Man berechne die Ableitungen f' der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$$\text{a)}\quad f(x) = x^x \qquad \text{b)}\quad f(x) = \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} \qquad \text{c)}\quad f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Aufgabe 3. Man bestimme eine Rekursionsformel für

$$I_n = \int dt\, (\ln t)^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,.$$

Teil C

Aufgabe 4. Durch $x_0 := 2$ und $x_{n+1} = x_n \cdot \dfrac{x_n^2 + 9}{3x_n^2 + 3}$ für $n \geq 0$ werde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert. Zeige: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert monoton fallend gegen $\sqrt{3}$.

Aufgabe 5. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) \leq 0$ und $f(1) > 0$. Sei $\xi := \sup\{x \in [0,1] \ : \ f(x) \leq 0\}$. Zeige: $f(\xi) = 0$.

Aufgabe 6. Zeige, daß für alle $a > 1$ gilt:
Für $0 \leq x < y$ gilt $ax^{a-1}(y-x) < y^a - x^a < ay^{a-1}(y-x)$.