Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 08/09

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 23.10.08, bis 14h00 in den Briefkästen — Blatt 1

Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nx - \frac{n}{2} + 1 & \text{für } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

Zeige: a) $\{f_n\}_{n\ge 2}$ ist Cauchy-Folge auf $(\mathcal{C}([0,1]), \|\ \|)$ mit $\|f\| := \displaystyle\int_0^1 dt\, |f(t)|$.
b) $\{f_n\}_{n\ge 2}$ ist bezüglich dieser Norm nicht konvergent.

Aufgabe 2 Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $\varnothing \neq A \subset X$ eine Teilmenge. Für $x \in X$ sei $d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y)$. Zeige:
a) Es gilt $d(x,A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cup \partial A$.
b) Für $x, y \in X$ gilt $|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$.

Aufgabe 3. Sei $(X, \|\ \|)$ ein Banach-Raum. Zeige:
a) Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Elementen in X mit $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, so existiert $y := \displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x_n \in X$, und es gilt $\displaystyle\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n \Big\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|$.
b) Ist $f : X \to X$ linear mit $\|f\|_{op} < 1$, so existiert $(\mathrm{id} - f)^{-1} : X \to X$, ist stetig und erfüllt $\|(\mathrm{id} - f)^{-1}\|_{op} \le \frac{1}{1 - \|f\|_{op}}$.

Aufgabe 4. Für eine Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ sei

$$\|A\|_{op} := \max_{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \le 1} \|Ax\| \ ,$$

wobei $\|\ \|$ die jeweiligen euklidische Norm auf $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, und

$$\|A\|_{max} := \max\{|a_{ij}| \ : \ 1 \le i \le m \ , \ 1 \le j \le n\} \ .$$

Zeige: $\|A\|_{max} \le \|A\|_{op} \le \sqrt{mn}\|A\|_{max}$.