Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. R. Brüske

WS 08/09

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 13.11.08, bis 14h00 in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. a) Eine Abbildung $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei durch $P(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ erklärt, und eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Zeige:

$$(\triangle f)\circ P = \partial_r^2(f\circ P) + \frac{1}{r}\partial_r(f\circ P) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2(f\circ P)\ .$$

b) Man berechne die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ , \qquad P(r,\vartheta,\varphi) := (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)\ .$$

Aufgabe 2. Es sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^m \ :\ \|x\| \leq 1\}$. Eine Abbildung $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar, und es gebe ein $K > 0$ mit $\|Df(x)\|_{op} \leq K\ \forall x \in B_1(0)$. Zeigen Sie: f ist auf $B_1(0)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3. Man bestimme die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, mit $f(x,y) := \frac{x-y}{x+y}$, im Punkt $(1,1)$ bis zur Ordnung $|\alpha| \leq 2$.

Aufgabe 4. Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und für eine stetig differenzierbare Funktion $f : G \to \mathbb{R}$ gelte $Df = 0$. Zeigen Sie: f ist konstant.