Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 08/09**
Dr. R. Brüske

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Donnerstag, 27.11.08, bis 14h00 in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Für eine symmetrische Matrix $A = A^t \in M(n,\mathbb{R})$ werde durch $F(x) := x^t A x$ ($x \in \mathbb{R}^n$ als Spaltenvektor aufgefaßt) eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert. Zeige:
a) F besitzt auf der Einheitssphäre $S^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1\}$ ein Minimum λ, etwa in $v \in \mathbb{R}^n$.
b) Der Vektor v aus a) ist dann Eigenvektor von A zum Eigenwert $v^t A v$.

Aufgabe 2. Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i$.
a) Man zeige: Eingeschränkt auf die Teilmenge

$$M := \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_\nu \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq \nu \leq n \ , \ \sum_{\nu=1}^n x_\nu = 1\Big\}$$

besitzt F genau in $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$ ein absolutes Maximum.
b) Man folgere: Für beliebige positive $x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$\prod_{i=1}^n x_i \leq \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)^n \ .$$

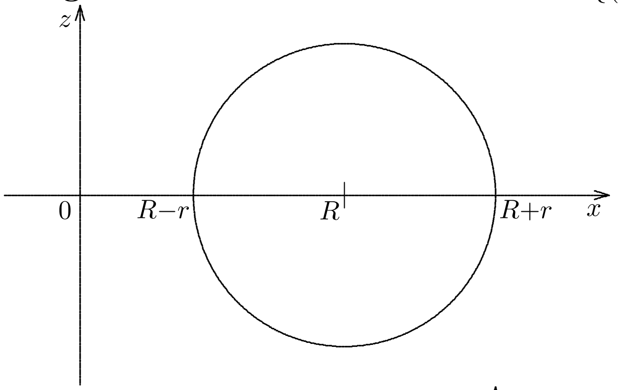
"=" gilt genau dann, wenn $x_1 = \ldots = x_n$ gilt.

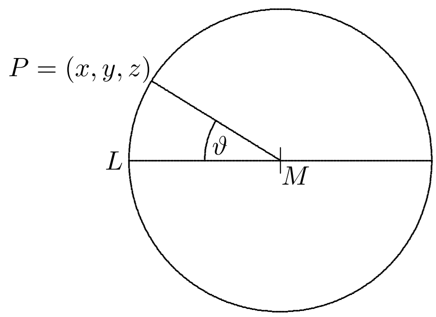
Aufgabe 3. Es sei $p \in \mathbb{R}, p > 1, a \in \mathbb{R}^n$. Betrachtet werde die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \langle a, x\rangle = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ und die durch $f(x) = 1 - \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0$ gegebene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$.
a) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von F auf M das absolute Maximum $\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}$ und das absolutes Minimum $-\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}$ hat, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.
b) Man folgere:

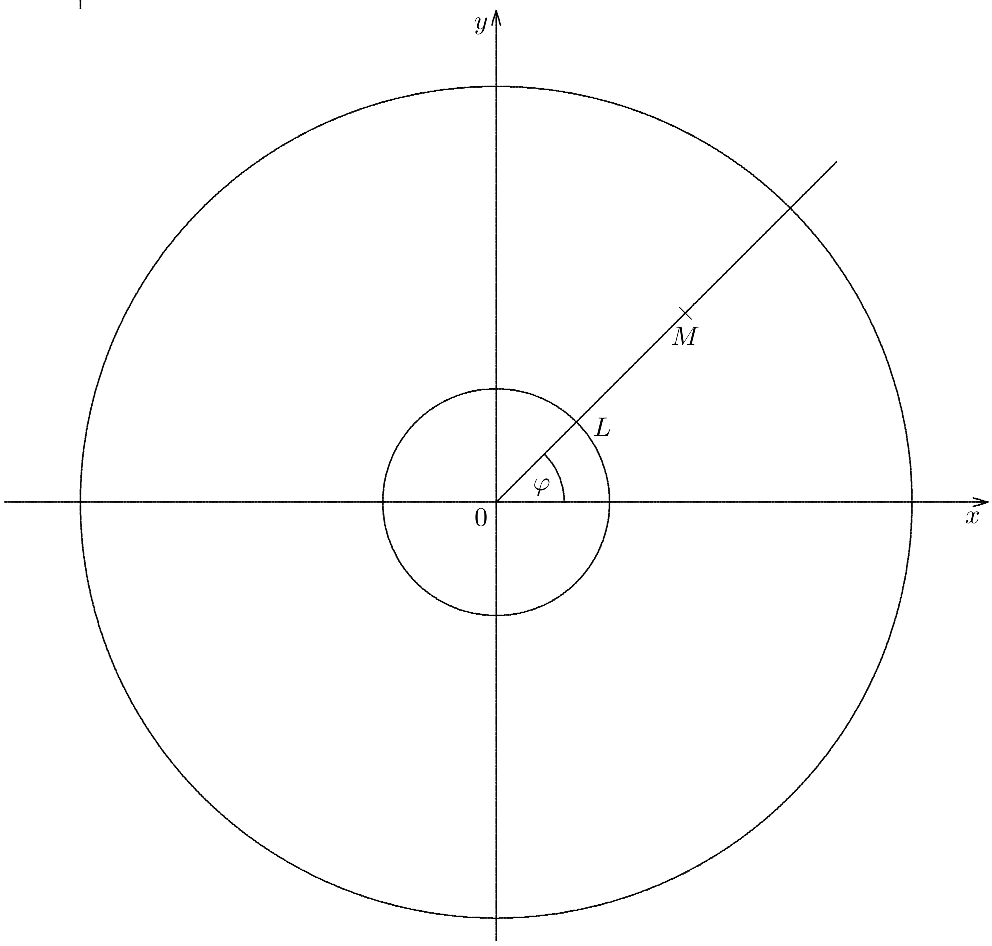
$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i x_i\Big| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Aufgabe 4 ist auf der 2. Seite!

Aufgabe 4. Es seien $0 < r < R$ und $K = \{(x, 0, z) \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2\}$.







Durch Drehen dieses Kreises um die z-Achse entsteht eine Fläche, die Torusfläche T. Jeder Punkt P von T ist eindeutig bestimmt durch den Drehwinkel φ ($0 \le \varphi < 2\pi$) und den Winkel ϑ ($0 \le \vartheta < 2\pi$), der wie folgt entsteht: Man zeichne einen Querschnitt durch P und 0 parallel zur z-Achse. Das ist ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M. Sei L der Punkt auf dem Kreis mit $z = 0$ und Abstand $R - r$ zur z-Achse. Dann sei $\vartheta = \measuredangle LMP$. Man zeige:

a) T wird durch die Gleichung $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2 = 0$ als zweidimensionale Fläche erkannt.

b) Man beschreibe x, y, z als Funktionen von φ, ϑ (lokales Koordinatensystem) und berechne den Tangentialraum von T in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.