

## Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 29.10.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen

Blatt 2

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie:

a) 
$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

b) 
$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

c) 
$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

d) 
$$\sum_{k=0}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1$$

**Aufgabe 2.** Für  $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$  heißt

i)  $A(a, b) := \frac{a+b}{2}$  das arithmetische Mittel,

ii)  $G(a, b) := \sqrt{ab}$  das geometrische Mittel,

iii)  $H(a, b) := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$  das harmonische Mittel.

Zeigen Sie:  $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$ , mit Gleichheit nur für  $a = b$ .**Aufgabe 3.** Für  $0 < a < b$  werden rekursiv Intervalle  $I_n = [a_n, b_n]$  definiert durch

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_n = G(a_{n-1}, b_{n-1}), \quad b_n = A(a_{n-1}, b_{n-1}).$$

Zeigen Sie:  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Intervallschachtelung.Bemerkung: Die in allen Intervallen liegende reelle Zahl heißt das *arithmetisch-geometrische Mittel* von  $a, b$ .**Aufgabe 4.** Diese Aufgabe erfordert einen Taschenrechner (o.ä.) mit Quadratwurzelfunktion.Man berechne, auf mindestens 7 Stellen nach dem Komma genau, die Zahlen  $a_n, b_n, s_n, p_n$  für  $n = 1, 2, 3$ , welche rekursiv definiert sind durch  $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, b_0 = 1, s_0 = \frac{1}{2}$  und

$$a_n = G(a_{n-1}, b_{n-1}), \quad b_n = A(a_{n-1}, b_{n-1}), \quad s_n = s_{n-1} - 2^n (b_n^2 - a_n^2), \quad p_n = \frac{2b_n^2}{s_n}.$$

Was stellen Sie fest für  $p_3$ ?