Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 5.11.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 3

Aufgabe 1. Man gebe Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{1-2\mathrm{i}} \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{2-3\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} \qquad\qquad \text{c)}\quad \Big(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\Big)^n , \qquad n\in\mathbb{N}$$

Aufgabe 2. Man gebe sämtliche Lösungen folgender Gleichungen in der Form $z = x+\mathrm{i}y$ an:

$$\text{a)}\quad z^4 = -1 \qquad\qquad \text{b)}\quad z^2+(1+\mathrm{i})z+2-\mathrm{i}=0$$

Aufgabe 3. Die Normalform einer kubischen Gleichung ist

$$z^3+pz+q=0\;, \qquad p,q\in\mathbb{R}\;.$$

a) Rechnen Sie nach, daß für $D := \big(\frac{q}{2}\big)^2+\big(\frac{p}{3}\big)^3 > 0$ die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1 = u+v\;, \qquad z_2 = \Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)u+\Big(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)v$$

$$z_3 = \Big(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)u+\Big(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)v$$

mit

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}\;, \qquad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\;.$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$ für $a<0$.

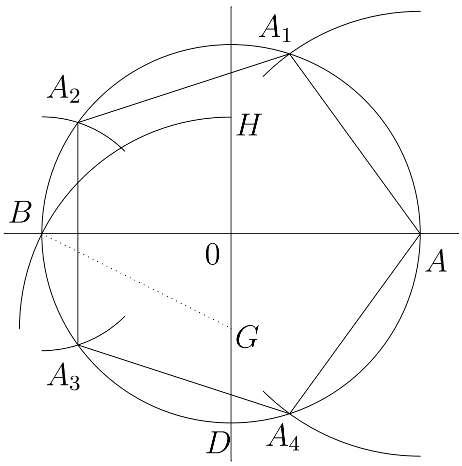
b) Man bestimme die Lösungen von $z^3+6z+2=0$.

(bitte wenden)

Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal

1. Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.
2. Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.
3. Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y$-Achse), welcher innerhalb S liegt, sei H.
4. Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.
5. Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann sind (A, A_1, A_2, A_3, A_4) die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.



Aufgabe 4.

a) Zeigen Sie: Die Länge $|\overline{0H}| =: h = g^{-1}$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

b) Zeigen Sie, daß die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

Hinweis: Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.

c) Beweisen Sie die Identitäten $(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_4$, $z_2z_3 = 1$ und $z_1z_4 = 1$.