Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 10.12.09, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 8

Aufgabe 1. Gegeben seien folgende Vektoren $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

a) Zeigen Sie: (v_1, v_2, v_3) ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie für $i = 1, 2, 3$ die 9 Koeffizienten $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}$ der Zerlegung $w_i = \lambda_{1i} v_1 + \lambda_{2i} v_2 + \lambda_{3i} v_3$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Dimensionen der Untervektorräume $V, W, V+W, V \cap W \subset \mathbb{R}^5$, wenn $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $W = \mathrm{span}(w_1, w_2, w_3)$, mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Es sei $P_n[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome in x vom Grad $\leq n$ und

$$V = \Big\{ p(x) \in P_4[x] \ : \ \ p(1) = p(-1) = 0 \Big\}, \qquad W = P_2[x] .$$

a) Zeigen Sie: $V \subset P_4[x]$ ist Untervektorraum.

b) Geben Sie je eine Basis von $V, W, V+W, V \cap W$ an.

Aufgabe 4. Es seien $W_1, \dots, W_n$ endlich-dimensionale Untervektorräume von V und $W = W_1 + \dots + W_n$. Zeigen Sie:

$$\dim_K(W) = \sum_{i=1}^n \dim_K(W_i) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l}\text{von Null verschiedene Vektoren} \\ w_1 \in W_1, \dots, w_k \in W_k \text{ sind linear unabhängig.}\end{array}$$