Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 21.1.10, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ für

a)	$f(x) = x \arccos x$,	$x \in \,]-1, 1[$
b)	$f(x) = x^{(x^2)}$,	$x \in \mathbb{R}_+^\times$
c)	$f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$,	$x \in \mathbb{R}$
d)	$f(x) = \arctan(\ln x)$,	$x \in \mathbb{R}_+^\times$

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f(x) = \begin{cases} x^n \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 0$

a) nicht stetig

b) stetig, aber nicht differenzierbar

c) differenzierbar, aber f' ist nicht stetig in $x_0 = 0$

d) differenzierbar, und f' ist stetig in $x_0 = 0$

Aufgabe 3. Beweisen Sie mittels Differentiation:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \sin(kx) = \frac{n \sin((n-1)x) - (n-1)\sin(nx)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} , \qquad x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} , \quad n \in \mathbb{N}^\times$$

Hinweis: $k \sin(kx) = \operatorname{Im}(k e^{ikx}) = \operatorname{Im}(k (e^{ix})^k)$

Aufgabe 4 Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ und $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k e^{-x^2}$.

Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt höchstens $n+1$ lokale Extrema.

b) Ist n ungerade, dann werden das globale Minimum und das globale Maximum in je einem dieser lokalen Extrema angenommen.

c) Berechnen Sie die Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, an denen die Funktion $f(x) = (x-2)e^{-x^2}$ ihr Minimum bzw. Maximum annimmt.