Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 10/11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 26.10.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + z - \mathrm{e}^{x+2y} + \mathrm{e}^{x+y+z} \\ x + y + z + \frac{1}{2}\sin(x+y+z) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass das Gleichungssystem $F(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ nach x und y aufgelöst werden kann.

(b) Bestimme das maximale Intervall für z, auf dem die Auflösung in (a) möglich ist.

(c) Bestimme den Tangentialvektor der Lösungskurve aus (a) an der Stelle $z = 0$.

Aufgabe 2. Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z = 0$.

(a) Zeige, dass das Gleichungssystem $G(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ nach z aufgelöst werden kann.

(b) Bestimme für die Auflösung $z(x,y)$ aus (a) das Tailorpolynom zweiten Grades an der Stelle $(x,y) = (0,0)$.

Aufgabe 3. Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $E_n \in M(n \times n, \mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und $\mathrm{Spur}(B) = \sum_{k=1}^{n} b_{kk}$ die Spur von $B = (b_{ij})_{i,j}$. Zeige:

(a) Die Abbildung $L_A\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$, $X \mapsto AX$, ist differenzierbar und $(DL_A)(X)Y = AY$.

(b) $(D\det)(E_n)B = \mathrm{Spur}(B)$.

(c) $(D\det)(A)AB = \det(A)\mathrm{Spur}(B)$. (*Hinweis:* Benutze die Gleichung $(\det \circ L_A)(X) = \det(AX) = \det(A)\det(X)$, die Kettenregel sowie (a,b).)

Aufgabe 4. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Zeige:

(a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(\exp(tA))$, erfüllt die Gleichung $f'(t) = f(t)\mathrm{Spur}(A)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\exp(-\mathrm{Spur}(A)t)$, ist konstant.

(c) Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$.