Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 10/11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 11.1.2011, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Der Kotangens ist definiert als $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Bestimme:

(a) $\operatorname{res}_{z=k} \frac{\cot(\pi z)}{z^2}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cot(\pi z)}{z^2}$. (*Hinweis:* Benutze die Gleichung $\cot(\pi z)\sin(\pi z) = \cos(\pi z)$, um die ersten Glieder der Laurent-Reihe von $\cot(\pi z)$ bei $z = 0$ zu berechnen.)

Aufgabe 2. Berechne mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 5x^2 + 2}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \frac{1 - a\cos t}{1 - 2a\cos t + a^2}$, wobei $a \in \mathbb{R}$ und $|a| \neq 1$.
(*Hinweis:* Betrachte $\int_{\partial K_1(0)} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$ und verwende nicht Satz 15.9!)

Aufgabe 3. Zeige schrittweise:

(a) Für $t \in [0, \pi]$ und $r > 0$ ist $|\mathrm{e}^{ir\mathrm{e}^{it}}| < 1$. (*Hinweis:* Das ist einfacher, als es aussieht.)

(b) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_0^{\pi} dt \left| \frac{r\mathrm{e}^{ir\mathrm{e}^{it}}}{1 + r^2\mathrm{e}^{2it}} \right| = 0.$

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}$ (*Hinweis*: Integriere die Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{iz}/(1 + z^2)$ entlang derselben Kurve wie im Beweis von Satz 15.10).

Aufgabe 4. *(Weihnachtsmann-Zusatzaufgabe)* Zeige schrittweise:

(a) Seien $N \in \mathbb{Z}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + iy \notin \mathbb{Z}\pi$. Dann gilt:

$$|\cot(x + iy)| \leq \frac{\mathrm{e}^{2|y|} + 1}{\mathrm{e}^{2|y|} - 1} \quad \text{und} \quad \left|\cot\left(\pi(N + 1/2) + iy\right)\right| \leq \frac{\mathrm{e}^{2|y|} - 1}{\mathrm{e}^{2|y|} + 1}.$$

(*Hinweis:* Verwende ohne Beweis die folgende (geometrisch offensichtliche) Relation: $|\mathrm{e}^{it}a - b| \geq |a - b|$ für alle $a, b \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$.)

(b) Sei $N \in \mathbb{N}$ und γ_N die Kurve, die das achsenparallele Quadrat mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge $2N + 1$ im positiven Drehsinn mit konstanter Geschwindigkeit 1 (d.h. $\gamma_N' \equiv 1$) durchläuft. Dann gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} dz \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} = 0.$$

(c) Es gilt $\displaystyle\int_{\gamma_N} dz \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = 2\pi i \left(-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^2} \right)$. (*Hinweis:* Aufgabe 1)

(d) Es gilt $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.