Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 10/11**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 18.01.2011, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Sei $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty[$ stückweise stetig differenzierbar. Bei Rotation um die x-Achse überstreicht der Graph von f die Rotationsfläche

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 = f(x)^2\},$$

deren Oberflächeninhalt $A(M)$ gegeben ist durch

$$A(M) = 2\pi \int_a^b dx \cdot f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}. \tag{1}$$

(a) Seien $R > r > 0$. Berechne die Oberflächeninhalt des Torus $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (\sqrt{y^2+z^2} - R)^2 = r^2\}$.

(b) Berechne die Fläche des Teils der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, der außerhalb des Parabeloids $x + y^2 + z^2 = 16$ liegt; s. Abb. 1. (*Hinweis:* Verwende (1).)

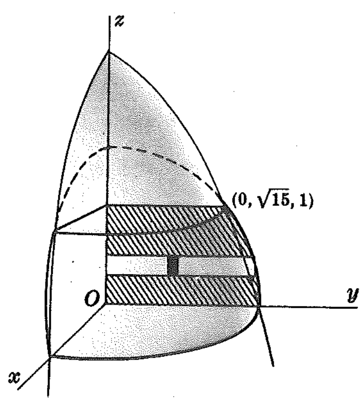

Abb. 1 mit vertauscher x- und z-Achse

Aufgabe 2. Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty[$ wie in Aufgabe 1.

(a) Bezeichne V das Volumen des Körpers $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b], y^2 + z^2 \leq f(x)\}$ und A den Flächeninhalt unter dem Graphen von f (d.h. der Inhalt der von den Kurven $y = 0$, $x = a$, $y = f(x)$, $x = b$ berandete Fläche) sowie U den Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt der Fläche unter dem Graphen bei der Rotation um die x-Achse beschreibt. Beweise die *zweite Guldinsche Regel* $V = AU$.

(b) Berechne das Volumen (des Inneren) des Torus aus (b).

Aufgabe 3. (a) Bestimme das Volumen, das von dem Paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ und der Fläche $z = 4 - y^2$ eingeschlossen wird, s. Abb. 2. (*Hinweis:* Integriere in der Reihenfolge $\int dx \int dy \int dz$ mit gegeeigneten Grenzen.)

(b) Bestimme die Masse des Körpers, der im ersten Oktanten durch die Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ und den Zylinder $y^2 + z^2 = 4$ begrenzt wird, wenn die Dichte an der Stelle (x, y, z) gleich z ist, s. Abb. 3. (*Hinweis:* Integriere in der Reihenfolge $\int dy \int dx \int dz$ mit gegeeigneten Grenzen.)

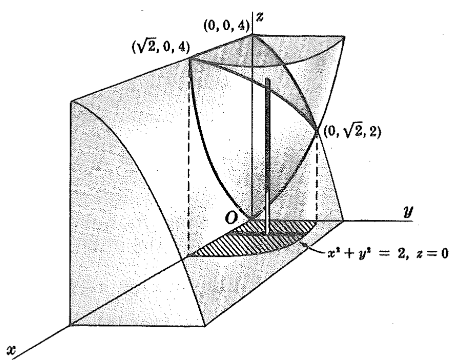

Abb. 2

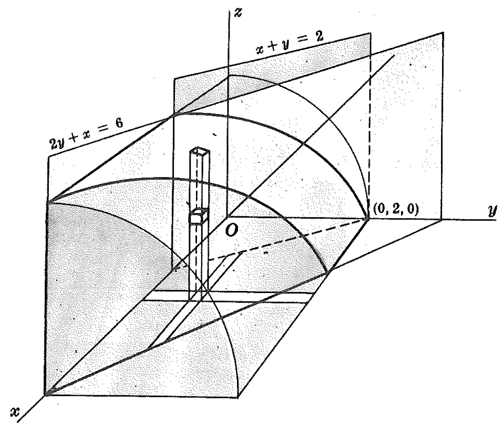

Abb. 3

Aufgabe 4. Seien $a, b, c > 0$.

(a) Bestimme die Masse der Platte $\{(x, y, z) : 0 \leq x, y \leq a, |z| \leq b\}$, wenn die Dichte an der Stelle (x, y, z) gleich $c(x^2 + y^2)$ ist.

(b) Bestimme Masse und Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse einer (zweidimensionalen) Platte, die als Ränder den Bogen der Kurve $y = \sin x$ und die x-Achse hat (jeweils mit $x \in [0, \pi]$), wenn die Dichte an der Stelle (x, y) gleich cy ist.