Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 10/11

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 25.01.2011, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 13

Zur Berechnung der Integrale in den Aufgaben 1 und 2 ist der Transformationssatz auf die Abbildung $(\rho, \phi, \vartheta) \mapsto (\rho \cos\phi \sin\vartheta, \rho \sin\phi \sin\vartheta, \rho\cos\vartheta)$ anzuwenden.

Aufgabe 1. (a) Bestimme die Masse einer Kugel vom Radius R, wenn sich die Dichte reziprok dem Quadrat des Abstands vom Mittelpunkt verändert.

(b) Eine Kugel mit Radius a stehe auf der x, y-Ebene mit dem Südpol im Ursprung. Dann wird sie in Polarkoordinaten beschrieben durch $\rho(\vartheta) = 2a\cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, \pi/2]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ beliebig. Bestimme das Volumen, das durch diese Kugel aus dem Kegel $0 \le \vartheta \le \pi/4$ herausgeschnitten wird, s. Abbildung 1.

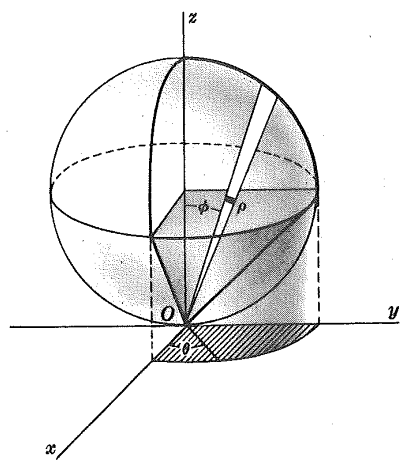

Abb. 1 (Achtung: ϕ, θ stehen für ϑ, ϕ)

Aufgabe 2. Wir betrachten den Körper K, der von dem Kegel $(0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{6}, 0 \le \phi \le 2\pi)$ aus der Kugel vom Radius $r = 2$, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist, herausgeschnitten wird, s. Abbildung 2.

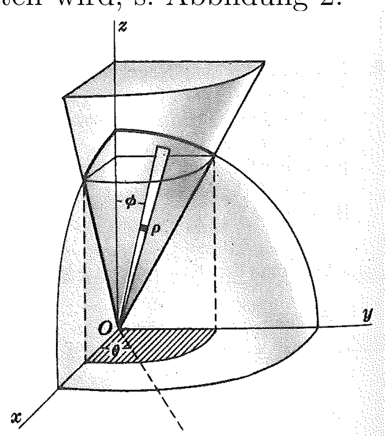

Abb. 2

(a) Bestimme das Volumen und die z-Koordinate des Schwerpunktes von K.

(b) Bestimme das Trägheitsmoment von K bezüglich der z-Achse.

Aufgabe 3. Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $K \subseteq U$ kompakt. Dann ist der *Flächeninhalt* $A(F(K))$ der Fläche $F(K) \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{aligned} A(F(K)) &= \int_K dx \det\big((DF)(x)^T(DF)(x)\big)^{1/2} \\ &= \int_K dx \det\left(\left(\left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_j}\right\rangle\right)_{i,j}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Zeige: Hat F die spezielle Form $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3(x_1, x_2))$, so ist

$$A(F(K)) = \int_K dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2}.$$

(b) Bestimme den Flächeninhalt des Teiles vom Kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$, der oberhalb der x, y-Ebene und innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 4y$ liegt, s. Abbildung 3. Verwende dazu die Projektion auf die x, y-Ebene und (a).

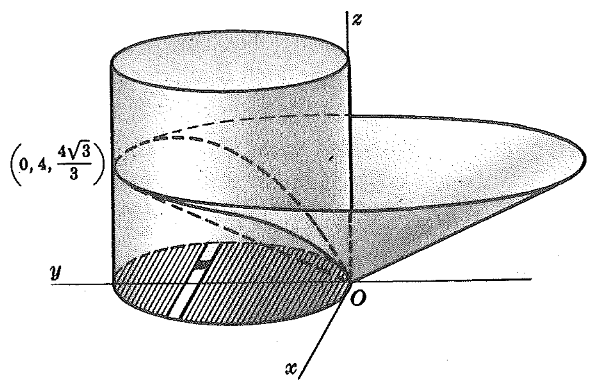

Abb. 3

Aufgabe 4. Sei $a < b$ und $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar. Bei Rotation um die x-Achse überstreicht der Graph von f die Rotationsfläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

(a) Zeige mit Hilfe von Formel (1) und der Abbildung

$$F\colon [a, b] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (x, \phi) \mapsto (x, f(x)\cos\phi, f(x)\sin\phi),$$

dass der Flächeninhalt $A(M)$ der Fläche M gegeben ist durch

$$A(M) = 2\pi \int_a^b dx \cdot f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

(b) Bezeichne l die Bogenlänge der Kurve $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(x))$, und U den Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt von c bei der Rotation um die x-Achse beschreibt. Die y-Koordinate des Schwerpunkts von c ist dabei gegeben durch $\int_a^b dx f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}/l$. Beweise die *erste Guldinsche Regel* $A(M) = lU$.