Von Neumanns Dichtesatz

Martin Engbers

21. Oktober 2010

1 Operatortopologien auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

1.1 Definition. *(Amplifikation) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{H}^\infty = \left\{ (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \xi_n \in \mathcal{H} \text{ und } \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty \right\}$ die Amplifikation von $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{H}^\infty$ wieder ein Hilbertraum bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, und mit dem Skalarprodukt $\langle (\xi_n)_n \mid (\eta_n)_n \rangle := \sum_n \langle \xi_n \mid \eta_n \rangle$.*

1.2 Definition. *(Operatortopologien)*

(a) Die schwache Operatortopologie (WOT) auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die erzeugt wird vom Halbnormensystem $\{r_{\xi,\eta} \mid \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$ mit $r_{\xi,\eta}(T) := |\langle T\xi \mid \eta \rangle|$.

(b) Die starke Operatortopologie (SOT) auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die vom Halbnormensystem $\{p_\xi \mid \xi \in \mathcal{H}\}$ mit $p_\xi(T) := \|T\xi\|$ erzeugt wird.

(c) Die stark-Operatortopologie (S*OT) auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die vom Halbnormensystem $\{p_\xi, q_\xi \mid \xi \in \mathcal{H}\}$ mit $p_\xi(T) := \|T\xi\|$ und $q_\xi(T) := \|T^*\xi\|$ erzeugt wird.*

(d) Die σ-schwache Operatortopologie (σWOT) auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die vom Halbnormensystem $\left\{ r_{(\xi_n)_n,(\eta_n)_n} \mid (\xi_n)_n, (\eta_n)_n \in \mathcal{H}^\infty \right\}$ mit $r_{(\xi_n)_n,(\eta_n)_n}(T) := |\sum_n \langle T\xi_n \mid \eta_n \rangle|$ erzeugt wird.

(e) Die σ-starke Operatortopologie (σSOT) auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die erzeugt wird vom Halbnormensystem $\left\{ p_{(\xi_n)_n} \mid (\xi_n)_n \in \mathcal{H}^\infty \right\}$ mit $p_{(\xi_n)_n}(T) := \sqrt{\sum_n \|T\xi_n\|^2}$.

(f) Die σ-stark-Operatortopologie (σS*OT) auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die lokalkonvexe Topologie, die vom Halbnormensystem $\left\{ p_{(\xi_n)_n}, q_{(\xi_n)_n} \mid (\xi_n)_n \in \mathcal{H}^\infty \right\}$ erzeugt wird mit $p_{(\xi_n)_n}(T) := \sqrt{\sum_n \|T\xi_n\|^2}$ und $q_{(\xi_n)_n}(T) := \sqrt{\sum_n \|T^*\xi_n\|^2}$.*

1.3 Bemerkung. *Ist T ein Operator in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so definiere man den amplifizierten Operator $T^\infty \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty)$ durch $T^\infty(\xi_n)_n := (T\xi_n)_n$. Dann gelten für die Norm und das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}^\infty$:*

$$\begin{aligned} \langle T(\xi_n)_n \mid (\eta_n)_n\rangle &= \langle (T\xi_n)_n \mid (\eta_n)_n\rangle &&= \textstyle\sum_n \langle T\xi_n \mid \eta_n\rangle, \\ \|T^\infty(\xi_n)_n\| &= \|(T\xi_n)_n\| &&= \sqrt{\textstyle\sum_n \|T\xi_n\|^2}, \\ \|T^{\infty *}(\xi_n)_n\| &= \|T^{*\infty}(\xi_n)_n\| &&= \sqrt{\textstyle\sum_n \|T^*\xi_n\|^2}, \end{aligned}$$

Somit kann man die σWOT, σSOT und σS^*OT auch wie folgt verstehen:

$$\begin{aligned} T_\lambda \xrightarrow{\sigma WOT} T \;\text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\iff T_\lambda^\infty \xrightarrow{WOT} T^\infty \;\text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty), \\ T_\lambda \xrightarrow{\sigma SOT} T \;\text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\iff T_\lambda^\infty \xrightarrow{SOT} T^\infty \;\text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty), \\ T_\lambda \xrightarrow{\sigma S^*OT} T \;\text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\iff T_\lambda^\infty \xrightarrow{S^*OT} T^\infty \;\text{ in } \mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty). \end{aligned}$$

1.4 Theorem. *Die sechs Operatortopologien aus Definition 1.2 stehen im folgenden Zusammenhang zueinander:*

$$\begin{array}{ccccccc} \|\cdot\| & \succ & \sigma S^*OT & \succ & \sigma SOT & \succ & \sigma WOT \\ & & \curlyvee & & \curlyvee & & \curlyvee \\ & & S^*OT & \succ & SOT & \succ & WOT \end{array}$$

Beweis.

- $\|\cdot\| \succ \sigma S^*OT$: Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein Netz, das in der Normtopologie gegen einen Operator T konvergiert. Sei $(\xi_n)_n \in \mathcal{H}^\infty$ beliebig. Dann folgt sofort, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{\textstyle\sum_n \|(T_\lambda - T)\xi_n\|^2} &\leq \sqrt{\textstyle\sum_n \|T_\lambda - T\|^2 \|\xi_n\|^2} \\ &= \|T_\lambda - T\| \sqrt{\textstyle\sum_n \|\xi_n\|^2} \to 0, \\ \sqrt{\textstyle\sum_n \left\|(T_\lambda - T)^*\xi_n\right\|^2} &\leq \sqrt{\textstyle\sum_n \left\|(T_\lambda - T)^*\right\|^2 \|\xi_n\|^2} \\ &= \|T_\lambda - T\| \sqrt{\textstyle\sum_n \|\xi_n\|^2} \to 0. \end{aligned}$$

  Also konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ auch in der σS^*OT gegen den Operator T.

- $SOT \succ WOT$: Folgt sofort aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung: Ist $(T_\lambda)_\lambda$ ein Netz, dass in der SOT gegen T konvergiert, dann gilt immer auch $\lim_\lambda |\langle (T_\lambda - T)\xi \mid \eta\rangle| \leq \lim_\lambda \|(T_\lambda - T)\xi\| \, \|\eta\| \to 0$. Also konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ auch in der WOT gegen T.

- $\sigma SOT \succ \sigma WOT$: Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein Netz, dass in der σSOT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert. Seien $(\xi_n)_n$, $(\eta_n)_n \in \mathcal{H}^\infty$. Durch zweimaliges Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (zunächst auf $\mathcal{H}$, dann auf $\mathbb{C}$) folgt:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_n \langle (T_\lambda - T)\,\xi_n \mid \eta_n\rangle\right| &\leq \sum_n |\langle (T_\lambda - T)\,\xi_n \mid \eta_n\rangle| \\
&\leq \sum_n \|(T_\lambda - T)\,\xi_n\|\,\|\eta_n\| \\
&\leq \sqrt{\sum_n \|(T_\lambda - T)\,\xi_n\|^2}\sqrt{\sum_n \|\eta_n\|^2} \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

- $\sigma WOT \succ WOT$: Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein Netz, das in der σWOT gegen einen Operator T konvergiert. Seien $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ beliebig. Man setze $(\xi_n)_n := (\xi, 0, 0, ...)$ und $(\eta_n)_n := (\eta, 0, 0, ...)$. Dann sind $(\xi_n)_n, (\eta_n)_n \in \mathcal{H}^\infty$, und es folgt $\lim_\lambda |\langle (T_\lambda - T)\xi \mid \eta\rangle| = \lim_\lambda |\sum_n \langle (T_\lambda - T)\xi_n \mid \eta_n\rangle| \to 0$. Also konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ auch in der WOT gegen T.

- $\sigma SOT \succ SOT$: Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein Netz, das in der σSOT gegen einen Operator T konvergiert. Sei $\xi \in \mathcal{H}$ beliebig. Man setze $(\xi_n)_n := (\xi, 0, 0, ...) \in \mathcal{H}^\infty$. Dann folgt $\lim_\lambda \|(T_\lambda - T)\xi\| = \lim_\lambda \sqrt{\sum_n \|(T_\lambda - T)\xi_n\|^2} \to 0$. Also konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ auch in der SOT gegen T.

- $\sigma S^*OT \succ S^*OT$: Wenn ein Netz $(T_\lambda)_\lambda$ in der σS^*OT gegen einen Operator T konvergiert, dann konvergiert sowohl $(T_\lambda)_\lambda$ in der σSOT gegen T, als auch $(T_\lambda^*)_\lambda$ in der σSOT gegen T^*. Wie eben gezeigt wurde, konvergiert dann sowohl $(T_\lambda)_\lambda$ in der SOT gegen T, als auch $(T_\lambda^*)_\lambda$ in der SOT gegen T^*. Das bedeutet nichts anderes, als das $(T_\lambda)_\lambda$ in der S^*OT gegen T konvergiert.

- $\sigma S^*OT \succ \sigma SOT, \quad S^*OT \succ SOT$: Das ist klar, da die σSOT von weniger Halbnormen erzeugt wird, als die σS^*OT, und die SOT von weniger Halbnormen als die S^*OT. Wenn also ein Netz bezüglich der σS^*OT (bzw. der S^*OT) konvergiert, dann konvergiert es erst recht bezüglich der σSOT (bzw. der SOT). ∎

1.5 Theorem. *(Stetigkeit der Standardoperationen)*

(a) *Die Addition und die Skalarmultiplikation sind stetig bezüglich aller sechs Operatortopologien.*

(b) *Die Multiplikation ist einseitig stetig bezüglich aller sechs Operatortopologien, d.h. in jeder dieser Topologien gilt für ein konvergentes Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit Grenzwert x und ein $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dass auch $\lim_\lambda x_\lambda y = xy$ sowie $\lim_\lambda yx_\lambda = yx$.*

(c) *Die Involution ist stetig bezüglich der WOT und der σWOT, sowie bezüglich der S^*OT und der σS^*OT.*

Beweis.

(a) Addition und Skalarmultiplikation sind stetig bezüglich aller lokalkonvexen Topologien, insbesondere also bezüglich der sechs Operatortopologien.

(b) Falls $(T_\lambda)_\lambda$ in der WOT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beliebig ist, so folgt für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
|\langle (T_\lambda S - TS)\,\xi \mid \eta\rangle| &= |\langle (T_\lambda - T)\,(S\xi) \mid \eta\rangle| \to 0,\\
|\langle (ST_\lambda - ST)\,\xi \mid \eta\rangle| &= |\langle (T_\lambda - T)\,\xi \mid (S^*\eta)\rangle| \to 0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $(T_\lambda S)_\lambda$ in der WOT gegen TS, und $(ST_\lambda)_\lambda$ konvergiert in der WOT gegen ST. Somit ist die Multiplikation einseitig WOT-stetig.

Falls $(T_\lambda)_\lambda$ in der SOT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beliebig ist, so folgt für alle $\xi \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\|(T_\lambda S - TS)\,\xi\| &= \|(T_\lambda - T)\,(S\xi)\| \to 0,\\
\|(ST_\lambda - ST)\,\xi\| &\leq \|S\|\,\|(T_\lambda - T)\,\xi\| \to 0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $(T_\lambda S)_\lambda$ in der SOT gegen TS, und $(ST_\lambda)_\lambda$ konvergiert in der SOT gegen ST. Somit ist die Multiplikation einseitig SOT-stetig. Falls $(T_\lambda)_\lambda$ in der S^*OT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert, so konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ in der SOT gegen T, und $(T_\lambda^*)_\lambda$ konvergiert in der SOT gegen T^*. Nach dem eben Gezeigten konvergieren dann auch $(ST_\lambda)_\lambda$ gegen ST und $\big((ST_\lambda)^*\big)_\lambda = (T_\lambda^* S^*)_\lambda$ gegen $T^*S^* = (ST)^*$ in der SOT; ebenso konvergieren $(T_\lambda S)_\lambda$ gegen TS und $\big((T_\lambda S)^*\big)_\lambda$ gegen $(TS)^*$ in der SOT. Insgesamt konvergiert dann $(ST_\lambda)_\lambda$ in der S^*OT gegen ST, und $(T_\lambda S)_\lambda$ konvergiert in der S^*OT gegen TS. Somit ist die Multiplikation auch einseitig S^*OT-stetig.

Für die drei σ-Topologien nutze man die Tatsache, dass $(T_1T_2)^\infty = T_1^\infty T_2^\infty$ für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt. Wenn z.B. $(T_\lambda)_\lambda$ in der σWOT gegen T konvergiert und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ beliebig ist, dann konvergiert $(T_\lambda^\infty)_\lambda$ in der WOT gegen T^∞. Nach dem oben Gezeigten konvergiert dann auch das Netz $((ST)_\lambda^\infty)_\lambda = (S^\infty T_\lambda^\infty)_\lambda$ gegen $S^\infty T^\infty = (ST)^\infty$ in der WOT, also konvergiert $(ST_\lambda)_\lambda$ in der σWOT gegen ST. Nach demselben Argument konvergiert auch $(T_\lambda S)_\lambda$ in der σWOT gegen TS, somit ist die Multiplikation einseitig σWOT-stetig. Für die σSOT und die σS^*OT kann man ebenso verfahren.

(c) Nach Wahl der Halbnormensysteme ist sofort klar, dass die Involution stetig bezüglich der S^*OT und bezüglich der σS^*OT ist. Es bleiben also nur die WOT und die σWOT zu untersuchen. Wenn $(T_\lambda)_\lambda$ in der WOT gegen T konvergiert, dann folgt für alle ξ, $\eta \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} |\langle (T_\lambda - T)^*\xi \mid \eta\rangle| &= |\langle \xi \mid (T_\lambda - T)\eta\rangle| = \left|\overline{\langle (T_\lambda - T)\eta \mid \xi\rangle}\right| \\ &= |\langle (T_\lambda - T)\eta \mid \xi\rangle| \to 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert auch $(T_\lambda^*)_\lambda$ in der WOT gegen T^*. Wenn $(T_\lambda)_\lambda$ in der σWOT gegen T konvergiert, dann konvergiert $(T_\lambda^\infty)_\lambda$ in der WOT gegen T^∞. Nach dem eben gegebenen Argument konvergiert dann auch $((T_\lambda^\infty)^*)_\lambda$ in der WOT gegen $(T^\infty)^*$. Wegen $(T_\lambda^\infty)^* = (T_\lambda^*)^\infty$ und $(T^\infty)^* = (T^*)^\infty$ ist damit schon gezeigt, dass auch $(T_\lambda^*)_\lambda$ in der σWOT gegen T^* konvergiert. Damit ist gezeigt, dass die Involution sowohl WOT-stetig als auch σWOT-stetig ist. ■

Die Multiplikation ist im Übrigen bezüglich keiner der sechs Operatortopologien beidseitig stetig, und die Involution ist unstetig bezüglich der SOT und der σSOT (genau darum interessiert man sich für die S^*OT und die σS^*OT).

1.6 Beispiel. *(Der unilaterale Shift)*
Sei $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$ und sei $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine ONB. Der unilaterale Shift auf $\mathcal{H}$ ist der Operator $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $Se_1 = 0$ und $Se_j = e_{j-1}$ für alle $j > 1$. Der zugehörige adjungierte Operator S^* ist gegeben durch $S^*e_j = e_{j+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Sei nun eine Folge von Operatoren $(T_n)_n$ definiert durch $T_n := S^n$. Für die zugehörigen Adjungierten gilt dann $T_n^* = {S^*}^n$. Ist nun $x = \sum_j x_je_j$ ein beliebiger Vektor aus $\mathcal{H}$, so gilt $\lim_n \|T_nx\| = \lim_n \|\sum_{j>n} x_je_{j-n}\| = \lim_n \sqrt{\sum_{j>n} |x_j|^2} = 0$. Also konvergiert die Folge $(T_n)_n$ in der SOT gegen den Nulloperator. Auf der anderen Seite gilt aber $\lim_n \|T_n^*x\| = \lim_n \|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_je_{j+n}\| = \lim_n \sqrt{\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2} = \|x\|$. Also konvergiert $(T_n^*)_n$ in der SOT keinesfalls gegen den Nulloperator. Damit ist gezeigt, dass die Involution nicht SOT-stetig sein kann.

1.7 Theorem. *Auf jeder beschränkten Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt: Die WOT stimmt mit der σWOT überein, die SOT stimmt mit der σSOT überein, und die S^*OT stimmt mit der σS^*OT überein.*

Beweis.

- Sei $(T_\lambda)_\lambda$ ein beschränktes Netz in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dass in der WOT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert. Seien außerdem $(\xi_n)_n$, $(\eta_n)_n \in \mathcal{H}^\infty$ beliebig. Man wähle eine Konstante $C > 0$, so dass $\|T_\lambda - T\| \leq C$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Dann wähle man $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{n>N} \|\xi_n\|^2$, $\sum_{n>N} \|\eta_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{2C}$. Schließlich sei $\lambda_0 \in \Lambda$ so groß gewählt, dass $|\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| < \frac{\varepsilon}{2N}$ für alle $n \in \{1, ..., N\}$ und alle $\lambda \geq \lambda_0$. Für alle $\lambda \geq \lambda_0$ folgt dann wieder durch mehrmalige Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
& |\textstyle\sum_n \langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| \\
\leq\ & \textstyle\sum_n |\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| \\
=\ & \textstyle\sum_{n=1}^N |\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| + \sum_{n>N} |\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| \\
\leq\ & \textstyle\sum_{n=1}^N |\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| + \sum_{n>N} \|(T_\lambda - T)\, \xi_n\| \, \|\eta_n\| \\
\leq\ & \textstyle\sum_{n=1}^N |\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| + \|(T_\lambda - T)\| \sum_{n>N} \|\xi_n\| \, \|\eta_n\| \\
\leq\ & \textstyle\sum_{n=1}^N |\langle (T_\lambda - T)\, \xi_n \mid \eta_n \rangle| + \|(T_\lambda - T)\| \sqrt{\sum_{n>N} \|\xi_n\|^2} \sqrt{\sum_{n>N} \|\eta_n\|^2} \\
<\ & N \cdot \tfrac{\varepsilon}{2N} + C \cdot \sqrt{\tfrac{\varepsilon}{2C}} \cdot \sqrt{\tfrac{\varepsilon}{2C}} \quad = \quad \varepsilon.
\end{aligned}$$

  Also konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ auch in der σWOT gegen T. Damit ist klar, dass die σWOT und die WOT auf beschränkten Teilmengen von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ übereinstimmen.

- Sei nun $(T_\lambda)_\lambda$ ein beschränktes Netz in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dass in der SOT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert. Sei außerdem $(\xi_n)_n \in \mathcal{H}^\infty$ beliebig. Man wähle eine Konstante $C > 0$, so dass $\|T_\lambda - T\| \leq C$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Dann wähle man $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\sum_{n>N} \|\xi_n\|^2 < \frac{\varepsilon}{2C^2}$. Schließlich sei $\lambda_0 \in \Lambda$ so groß gewählt, dass $\|(T_\lambda - T)\, \xi_n\| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2N}}$ für alle $n \in \{1, ..., N\}$ und alle $\lambda \geq \lambda_0$. Für alle $\lambda \geq \lambda_0$ folgt dann sofort:

$$\begin{aligned}
& \textstyle\sum_n \|(T_\lambda - T)\, \xi_n\|^2 \\
=\ & \textstyle\sum_{n=1}^N \|(T_\lambda - T)\, \xi_n\|^2 + \sum_{n>N} \|(T_\lambda - T)\, \xi_n\|^2 \\
\leq\ & \textstyle\sum_{n=1}^N \|(T_\lambda - T)\, \xi_n\|^2 + \|T_\lambda - T\|^2 \cdot \sum_{n>N} \|\xi_n\|^2 \\
<\ & N \cdot \tfrac{\varepsilon}{2N} + C^2 \cdot \tfrac{\varepsilon}{2C^2} \quad = \quad \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $(T_\lambda)_\lambda$ auch in der σSOT gegen T. Damit ist klar, dass die σSOT und die SOT auf beschränkten Teilmengen von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ übereinstimmen.

- Sei schließlich $(T_\lambda)_\lambda$ ein beschränktes Netz in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, dass in der S^*OT gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert. Dann kovergiert $(T_\lambda)_\lambda$ in der SOT gegen T, und $(T_\lambda^*)_\lambda$ konvergiert in der SOT gegen T^*. Wie eben gezeigt wurde, konvergiert dann auch $(T_\lambda)_\lambda$ in der σSOT gegen T, und $(T_\lambda^*)_\lambda$ konvergiert in der σSOT gegen T^*. Insgesamt folgt also, dass $(T_\lambda)_\lambda$ in der σS^*OT gegen T konvergiert. ■

1.8 Theorem. *Für jede konvexe Teilmenge C von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt:*

- $\overline{C}^{WOT} = \overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{S^*OT}$
- $\overline{C}^{\sigma WOT} = \overline{C}^{\sigma SOT} = \overline{C}^{\sigma S^*OT}$

Beweis. Der Beweis ist recht umfangreich und wird erst in Abschnitt 4 geführt. ■

2 Von Neumanns Dichtesatz

2.1 Definition. *(Kommutanten)*
Ist $S \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, dann bezeichnet man $S' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid xy = yx$ für alle $y \in S\}$ als die Kommutante von S. Die Menge $S'' := (S')'$ bezeichnet man als die Bikommutante von S. Weitere iterierte Kommutanten schreibt man auch als S''', $S^{(4)}$, $S^{(5)}$ etc.

Der folgende Satz klärt die wichtigsten Eigenschaften von Kommutanten und iterierten Kommutanten.

2.2 Proposition. *(Eigenschaften von Kommutanten)*

(a) $S \subseteq S''$

(b) $A \subseteq B \implies B' \subseteq A'$.

(c) $A \subseteq B \implies A'' \subseteq B''$.

(d) $S' = S''' = S^{(5)} = \ldots$ *und* $S'' = S^{(4)} = S^{(6)} = \ldots$

(e) Ist $S = S^*$, so ist auch $S' = S'^*$

(f) S' ist eine $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in S'$.

(g) S' ist abgeschlossen in der WOT (also auch in allen anderen Operatortopologien und in der Normtopologie).

Beweis.

(a) Sei $x \in S$. Für jedes $y \in S'$ gilt $xy = yx$ nach Definition von S'. Also ist $x \in (S')' = S''$.

(b) Sei $x \in B'$. Dann vertauscht x mit allen Elementen von B, insbesondere also mit allen Elementen von A. Also ist $x \in A'$.

(c) Folgt unmittelbar aus (b).

(d) Mit (a) folgt sofort, dass $S' \subseteq S'''$ und $S \subseteq S'' \subseteq S^{(4)}$. Damit folgt aber weiter:

$$\begin{aligned} & x \in S''' \\ \implies & \forall y \in S'' : \ xy = yx \\ \implies & \forall y \in S : \ xy = yx \\ \implies & x \in S'. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} & x \in S^{(4)} \\ \implies & \forall y \in S''' : \ xy = yx \\ \implies & \forall y \in S' : \ xy = yx \\ \implies & x \in S''. \end{aligned}$$

(e) Für alle $a \in S$ ist nach Voraussetzung auch $a^* \in S$, und für alle $x \in S'$ folgt dann $x^*a = (a^*x)^* = (xa^*)^* = ax^*$. Also ist auch $x^* \in S'$, und es folgt $S'^* \subseteq S'$. Wegen $S' = S'^{**}$ folgt auch $S' \subseteq S'^*$ und damit $S' = S'^*$.

(f) Es ist klar, dass $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in S'$ gilt. Für $a \in S$, $x, y \in S'$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu y)a &= \lambda(xa) + \mu(ya) = \lambda(ax) + \mu(ay) \\ &= a(\lambda x) + a(\mu y) = a(\lambda x + \mu y),\end{aligned}$$

$$(xy)a = x(ya) = x(ay) = (xa)y = (ax)y = a(xy),$$

also ist S' eine Unteralgebra.

(g) Sei $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in S', dass in der WOT gegen $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert. Sei $a \in S$ beliebig. Es ist zu zeigen, dass $xa = ax$. Aus der Hilbertraumtheorie ist bekannt, dass dazu nur $\langle xa\xi \mid \eta\rangle = \langle ax\xi \mid \eta\rangle$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ gezeigt werden muss. Und tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned}\langle xa\xi \mid \eta\rangle &= \langle a\xi \mid x^*\eta\rangle &&= \lim_\lambda \langle a_\lambda\xi \mid x^*\eta\rangle \\ &= \lim_\lambda \langle xa_\lambda\xi \mid \eta\rangle &&= \lim_\lambda \langle a_\lambda x\xi \mid \eta\rangle \\ &= \langle ax\xi \mid \eta\rangle .\end{aligned}$$

Also ist S' abgeschlossen in der WOT. ■

Wir kommen nun zur zentralen Definition dieses Seminars.

2.3 Definition. *(Von-Neumann-Algebren)*
Eine *-Unteralgebra $\mathcal{M}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt Von-Neumann-Algebra (oder auch kurz: vN-Algebra), wenn $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ gilt.

2.4 Beispiel. *Ist S irgendeine Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so ist die Menge $S \cup S^*$ selbstadjungiert. Nach Proposition 2.2 (e) ist dann auch $(S \cup S^*)''$ selbstadjungiert; nach Proposition 2.2 (f) ist $(S \cup S^*)''$ eine Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; nach Proposition 2.2 (d) ist $(S \cup S^*)'' = ((S \cup S^*)'')''$; und nach Proposition 2.2 (a) ist $S \subseteq (S \cup S^*) \subseteq (S \cup S^*)''$. Also ist $(S \cup S^*)''$ eine Von-Neumann-Algebra, die S als Teilmenge enthält. Sei nun $\mathcal{M}$ eine weitere Von-Neumann-Algebra, die S als Teilmenge enthält. Da $\mathcal{M}$ selbstadjungiert ist, folgt $(S \cup S^*) \subseteq \mathcal{M}$, und mit Proposition 2.2 (c) folgt schließlich $(S \cup S^*)'' \subseteq \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$. Damit ist gezeigt: Ist $S \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so ist $(S \cup S^*)''$ die kleinste Von-Neumann-Algebra, die S als Teilmenge enthält.*

Nach obiger Definition und der vorangegangenen Proposition ist klar, dass alle Von-Neumann-Algebren abgeschlossen bezüglich der sechs Operatortopologien sind und das Einselement $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ enthalten. Von Neumanns Dichtesatz (auch als Bikommutantensatz bekannt) sagt, dass umgekehrt auch jede *-Unteralgebra $\mathcal{M}$ mit $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$, die in mindestens einer (dann automatisch in jeder!) der sechs Operatortopologien abgeschlossen ist, eine Von-Neumann-Algebra ist. Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zunächst ein Lemma:

2.5 Lemma. *Sei $\mathcal{M}$ eine *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$. Dann liegt $\mathcal{M}$ dicht in $\mathcal{M}''$ bezüglich der σSOT.*

Beweis. Sei $x \in \mathcal{M}''$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass es ein Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in $\mathcal{M}$ gibt, das in der σSOT gegen x konvergiert. Der Beweis zerfällt in drei Schritte.

1. Scritt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $\xi \in \mathcal{H}$ gibt es ein $a \in \mathcal{M}$ mit $\|x\xi - a\xi\| < \varepsilon$.

Man setze $\mathcal{L} := \overline{\{a\xi : a \in \mathcal{M}\}}$. Dann ist $\mathcal{L}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$, und es gilt $\mathcal{M}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$. Da $\mathcal{M}$ selbstadjungiert ist, folgt auch $\mathcal{M}\mathcal{L}^\perp \subseteq \mathcal{L}^\perp$, denn für alle $a \in \mathcal{M}$, alle $\eta_1 \in \mathcal{L}^\perp$ und alle $\eta_2 \in \mathcal{L}$ gilt $\langle a\eta_1 \mid \eta_2\rangle = \langle \eta_1 \mid a^*\eta_2\rangle = 0$ wegen $a^*\eta_2 \in \mathcal{L}$. Sei P die orthogonale Projektion auf $\mathcal{L}$. Sind nun $a \in \mathcal{M}$ und $\eta \in \mathcal{H}$ beliebig, so ist $P\eta \in \mathcal{L}$ und $(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P)\eta \in \mathcal{L}^\perp$, also ist auch $aP\eta \in \mathcal{L}$ und $a(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P)\eta \in \mathcal{L}^\perp$, und es gelten $PaP\eta = aP\eta$ und $Pa(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P)\eta = 0$. Daraus folgt

$$Pa\eta = Pa(P + (\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P))\eta = PaP\eta + Pa(\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P)\eta = aP\eta.$$

Da dies für jedes $\eta \in \mathcal{H}$ und für jedes $a \in \mathcal{M}$ gilt, folgt $P \in \mathcal{M}'$. Da schließlich $x \in \mathcal{M}''$ ist, folgt $xP = Px$. Wegen $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$ gilt $\xi \in \mathcal{L}$, und somit folgt $Px\xi = xP\xi = x\xi$. Also ist $x\xi \in \mathcal{L}$; nach Konstruktion von $\mathcal{L}$ bedeutet das aber, das es ein $a \in \mathcal{M}$ gibt mit $\|x\xi - a\xi\| < \varepsilon$.

2. Schritt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und je endlich vielen $(\xi_n^{(1)})_n, ..., (\xi_n^{(m)})_n \in \mathcal{H}^\infty$ gibt es ein $a \in \mathcal{M}$, so dass $\sqrt{\sum_n \|x\xi_n^{(k)} - a\xi_n^{(k)}\|^2} < \varepsilon$ für $k = 1, ..., m$.

Man betrachte die Abbildung $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty)$ mit $\Phi(T) = T^\infty$. Weiter setze man $(\xi_n)_n := \left(\xi_1^{(1)}, ..., \xi_1^{(m)}, \xi_2^{(1)}, ..., \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(1)}, ...\right)$; dann ist $(\xi_n)_n \in \mathcal{H}^\infty$. Das Bild $\Phi(\mathcal{M})$ ist eine *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty)$, die das Einselement $\mathbb{I}_{\mathcal{H}^\infty}$ enthält. Sei nun $A \in \Phi(\mathcal{M})'$ beliebig. Als Element von $\mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty) \cong \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{H})$ lässt sich A als unendliche Matrix $(A_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ mit Koeffizienten $A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ auffassen. Wegen $A \in \Phi(\mathcal{M})'$ gilt dann $(TA_{ij})_{ij} = \Phi(T)\ A = A\ \Phi(T) = (A_{ij}T)_{ij}$ für alle $T \in \mathcal{M}$. Das bedeutet nichts anderes, als dass $A_{ij} \in \mathcal{M}'$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$. Wegen $x \in \mathcal{M}''$ folgt dann $\Phi(x)\ A = (xA_{ij})_{ij} = (A_{ij}x)_{ij} = A\ \Phi(x)$.

Da dies für alle $A \in \Phi(\mathcal{M})'$ gilt, folgt $\Phi(x) \in \Phi(\mathcal{M})''$. Insgesamt ist also $\Phi(\mathcal{M})$ eine *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H}^\infty)$, die das Einselement $\mathbb{I}_{\mathcal{H}^\infty}$ enthält, und es ist $\Phi(x) \in \Phi(\mathcal{M})''$. Da wir uns genau in der Situation von Schritt 1 befinden, können wir auch hier wieder ein Element $a \in \mathcal{M}$ wählen, so dass $\|\Phi(x)\,(\xi_n)_n - \Phi(a)\,(\xi_n)_n\| < \varepsilon$. Nach Wahl von $(\xi_n)_n$ bedeutet das nichts anderes, als

$$\sqrt{\textstyle\sum_n \|(x-a)\xi_n^{(1)}\|^2 + ... + \sum_n \|(x-a)\xi_n^{(m)}\|^2} < \varepsilon.$$

Damit folgt aber sofort, dass auch

$$\sqrt{\textstyle\sum_n \|(x-a)\xi_n^{(k)}\|^2} < \varepsilon \qquad \text{für } k = 1, ..., m,$$

und damit ist der 2. Schritt abgeschlossen.

3. Schritt: Es gibt ein Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in $\mathcal{M}$, das in der σSOT gegen x konvergiert.

Sei dazu $\Lambda := \{(\varepsilon, E) \mid \varepsilon > 0 \text{ und } E \subseteq \mathcal{H}^\infty \text{ endlich}\}$. Für $\lambda_1 = (\varepsilon_1, E_1)$, und $\lambda_2 = (\varepsilon_2, E_2)$ aus Λ setze man $\lambda_1 \leq \lambda_2 :\iff \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ und $E_1 \subseteq E_2$. Dann ist $(\Lambda, \leq)$ eine gerichtete partielle Ordnung, und zu jedem $\lambda = (\varepsilon, E)$ gibt es nach dem 2. Schritt ein $x_\lambda \in \mathcal{M}$, so dass $\sqrt{\sum_n \|(x_\lambda - x)\xi_n\|^2} < \varepsilon$ für alle $(\xi_n)_n \in E$. Man sieht nun leicht ein, dass $(x_\lambda)_\lambda$ in der σSOT gegen x konvergiert. ■

2.6 Von Neumanns Dichtesatz. *Ist $\mathcal{M}$ eine *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $\mathbb{I}_\mathcal{H} \in \mathcal{M}$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$.
- (b) $\mathcal{M}$ *ist WOT-abgeschlossen.*
- (c) $\mathcal{M}$ *ist SOT-abgeschlossen.*
- (d) $\mathcal{M}$ *ist S^*OT-abgeschlossen.*
- (e) $\mathcal{M}$ *ist σWOT-abgeschlossen.*
- (f) $\mathcal{M}$ *ist σSOT-abgeschlossen.*
- (g) $\mathcal{M}$ *ist σS^*OT-abgeschlossen.*

Beweis.
$(a) \implies (b)$: Folgt aus Proposition 2.2 (g).
$(b) \implies (c), (d), (e)$: Die WOT ist nach Theorem 1.4 die schwächste der sechs Operatortopologien.
$(c), (d), (e) \implies (g)$: Die σS^*OT ist nach Theorem 1.4 die stärkste der sechs Operatortopologien.
$(g) \implies (f)$: Nach Theorem 1.8 stimmt der σS^*OT-Abschluss von $\mathcal{M}$ mit dem σSOT-Abschluss von $\mathcal{M}$ überein, denn $\mathcal{M}$ ist konvex.
$(f) \implies (a)$: Nach Proposition 2.2 (g) ist $\mathcal{M}''$ immer σSOT-abgeschlossen, und nach Lemma 2.5 liegt $\mathcal{M}$ immer σSOT-dicht in $\mathcal{M}''$. Ist $\mathcal{M}$ also σSOT-abgeschlossen, so folgt $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. ■

3 Beispiele für Von-Neumann-Algebren

Das einfachste Beispiel für eine Von-Neumann-Algebra ist natürlich $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbst:

3.1 Theorem. *Für jeden Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Von-Neumann-Algebra.*

Beweis. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist selbstadjungiert, SOT-abgeschlossen und enthält $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$. ■

Für endlich-dimensionale $*$-Unteralgebren von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist es nicht erforderlich, irgendwelche Abschlusseigenschaften nachzuprüfen:

3.2 Theorem. *Ist $\mathcal{M}$ eine endlich-dimensionale *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ und ist $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$, so ist $\mathcal{M}$ eine Von-Neumann-Algebra.*

Beweis. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, dass es auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V genau eine (hausdorffsche) lokalkonvexe Topologie gibt, und dass V bezüglich dieser Topologie automatisch vollständig ist. Da sowohl die Normtopologie als auch die sechs Operatortopologien (hausdorffsche) lokalkonvexe Topologien auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sind, stimmen alle sieben Topologien auf $\mathcal{M}$ überein, und $\mathcal{M}$ ist eine SOT-vollständige *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, also auch eine SOT-abgeschlossene *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Damit ist klar, dass $\mathcal{M}$ eine Von-Neumann-Algebra ist. ■

3.3 Definition. *(Zentrum)*
Ist $\mathcal{M}$ irgendeine Algebra, so ist das Zentrum von $\mathcal{M}$ definiert als die Teilmenge $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) := \{x \in \mathcal{M} \mid xy = yx \text{ für alle } y \in \mathcal{M}\}$ von $\mathcal{M}$.

Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt offenbar stets $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, und $\mathcal{M}$ ist abelsch (bzw. kommutativ) genau dann, wenn $\mathcal{M} = \mathcal{Z}(\mathcal{M})$, also $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$.

Da skalare Vielfache von $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ mit jedem Operator vertauschen, gilt $\mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{Z}(\mathcal{M})$ für jede Von-Neumann-Algebra $\mathcal{M}$. Als besonders interessant werden sich die Fälle herausstellen, in denen das Zentrum von $\mathcal{M}$ trivial ist, also keine weiteren Operatoren außer $\mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ enthält:

3.4 Definition. *(Faktor)*
Eine Von-Neumann-Algebra $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ heißt Faktor.

3.5 Theorem. *Für jeden Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Faktor.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})'$ beliebig. Man wähle zwei linear unabhängige Vektoren $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ (falls das nicht möglich ist, gilt $\mathcal{H} \cong 0$ oder $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ und der Beweis ist trivial). Seien P_1, P_2 die orthogonalen Projektionen auf die eindimensionalen (und somit abgeschlossenen) Teilräume $\mathbb{C}\xi_1$, $\mathbb{C}\xi_2$ und sei P die orthogonale Projektion auf den Teilraum $\mathbb{C}(\xi_1 + \xi_2)$. Wegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})'$ ist nun $P_1 T\xi_1 = TP_1\xi_1 = T\xi_1$, also ist $T\xi_1 \in \mathbb{C}\xi_1$ und es gibt ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ mit $T\xi_1 = \lambda_1\xi_1$. Nach demselben Argument gibt es $\lambda_2, \lambda \in \mathbb{C}$ so dass $T\xi_2 = \lambda_2\xi_2$ sowie $T(\xi_1 + \xi_2) = \lambda(\xi_1 + \xi_2)$. Aus der Linearität von T folgt nun unmittelbar, dass $\lambda\xi_1 + \lambda\xi_2 = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2$, was aufgrund der linearen Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 bereits $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ nach sich zieht. Da ξ_1, ξ_2 beliebige linear unabhängige Vektoren waren, folgt $T\xi = \lambda\xi$ für alle Vektoren $\xi \in \mathcal{H}$, also ist $T = \lambda\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{Z}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ ist; also ist $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Faktor. ∎

3.6 Theorem. *Ist (X, μ) ein endlicher Maßraum, so ist $\ell^\infty(X, \mu)$, aufgefasst als Algebra von Multiplikationsoperatoren auf dem Hilbertraum $\ell^2(X, \mu)$, eine kommutative Von-Neumann-Algebra.*

Beweis. Sei (X, μ) ein endlicher Maßraum. Dann ist $\mathcal{H} := \ell^2(X, \mu)$ ein Hilbertraum (mit Skalarprodukt $\langle f \mid g\rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$). Für jedes $f \in \ell^\infty(X, \mu)$ ist die Abbildung $M_f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $M_f(g) := fg$ ein beschränkter Operator, und die Abbildung $f \mapsto M_f$ ist injektiv. Fasst man $\mathcal{M} := \ell^\infty(X, \mu)$ auf diese Weise als Raum von Multiplikationsoperatoren auf $\mathcal{H}$ auf, so ist $\mathcal{M}$ eine *-Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (denn es gilt $M_f^* = M_{\overline{f}}$), und es ist $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$ (denn $\mathbb{I}_{\mathcal{H}} = M_{\mathbf{1}}$, wobei $\mathbf{1}$ die konstante Einsfunktion auf X sein soll). Sei nun $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein Operator mit $T \in \mathcal{M}'$. Man setze $f := T(\mathbf{1})$. Dann ist $f \in \ell^2(X, \mu)$. Da (X, μ) ein endlicher Maßraum ist, ist $\ell^\infty(X, \mu) \subseteq \ell^2(X, \mu)$, und für jedes $g \in \ell^\infty(X, \mu) \subseteq \ell^2(X, \mu)$ folgt

$$T(g) = T(g \cdot \mathbf{1}) = T(M_g(\mathbf{1})) = M_g(T(\mathbf{1})) = M_g(f) = g \cdot f = f \cdot g.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und sei $A_n := \left\{x \in X \mid \|T\| + \frac{1}{n} \le |f(x)|\right\}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left(\|T\| + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \mu(A_n) &= \left(\|T\| + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \|\mathbf{1}_{A_n}\|_2 &&= \left\|\left(\|T\| + \tfrac{1}{n}\right) \cdot \mathbf{1}_{A_n}\right\|_2 \\
&\le \||f| \cdot \mathbf{1}_{A_n}\|_2 &&= \|f \cdot \mathbf{1}_{A_n}\|_2 \\
&= \|T(\mathbf{1}_{A_n})\|_2 &&\le \|T\| \cdot \|\mathbf{1}_{A_n}\|_2 \\
&= \|T\| \cdot \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Also ist $\mu(A_n) = 0$ und somit auch $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = 0$. Es folgt, dass $|f| \le \|T\|$ fast überall, also ist $f \in \ell^\infty(X, \mu)$. Es gilt $T(g) = M_f(g) = f \cdot g$ für alle $g \in \ell^\infty(X, \mu)$. Da $\ell^\infty(X, \mu)$ dicht in $\mathcal{H} = \ell^2(X, \mu)$ liegt und sowohl T als auch M_f stetige Operatoren auf $\mathcal{H}$ sind, folgt $T = M_f$; also ist $T \in \mathcal{M}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ gilt. Da $\mathcal{M}$ offenbar kommutativ ist, gilt auch $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$. Also ist $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ und damit auch $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$, d.h. $\mathcal{M}$ ist eine Von-Neumann-Algebra. Wegen $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ ist $\mathcal{M}$ sogar eine maximale kommutative Unteralgebra von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, denn jeder mit $\mathcal{M}$ vertauschende Operator aus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist schon in $\mathcal{M}$ enthalten. ∎

4 Abschlüsse von konvexen Teilmengen

In diesem Abschnitt soll das noch unbewiesene letzte Theorem aus Abschnitt 1 hergeleitet werden.

4.1 Definition. *Sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Man bezeichnet die Normtopologie auf $\mathcal{X}$ auch als starke Banachraum-Topologie. Die schwache Banachraum-Topologie auf X ist die lokalkonvexe Topologie auf X, die vom Halbnormensystem $\{p_f \mid f \in \mathcal{X}'\}$ mit $p_f(x) = |f(x)|$ erzeugt wird.*

4.2 Theorem. *Sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, und sei $C \subseteq \mathcal{X}$ eine konvexe Teilmenge. Dann stimmt der Abschluss von C in der starken Banachraum-Topologie mit dem Abschluss von C in der schwachen Banachraum-Topologie überein.*

Beweis. Sei x im starken Abschluss $\overline{C}^s$ von C. Dann gibt es ein Netz $(x_\lambda)_\lambda \in C$, dass stark (also bezüglich der Norm) gegen x konvergiert. Ist dann $f \in \mathcal{X}'$ irgendein stetiges Funktional auf $\mathcal{X}$, so konvergiert auch $(f(x_\lambda))_\lambda$ gegen $f(x)$. Also liegt x auch im schwachen Abschluss $\overline{C}^w$ von C. Sei umgekehrt x ein element von $\overline{C}^w$. Dann gibt es ein Netz $(x_\lambda)_\lambda$ in C, dass schwach gegen x konvergiert. Angenommen, x läge nicht im starken Abschluss $\overline{C}^s$ von C. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es dann ein stetiges Funktional $f \in \mathcal{X}'$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $\sup_{y \in C} \operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x) - \varepsilon$. Insbesondere gilt dann für alle λ, dass $\operatorname{Re} f(x_\lambda) < \operatorname{Re} f(x) - \varepsilon$. Da nun aber $(x_\lambda)_\lambda$ schwach gegen x konvergiert (und die Funktion Re stetig ist), folgt daraus dann weiter, dass $\operatorname{Re} f(x) = \lim_\lambda \operatorname{Re} f(x_\lambda) \leq \operatorname{Re} f(x) - \varepsilon$, was offenbar ein Widerspruch ist. Also war die Annahme falsch, und x liegt bereits im starken Abschluss von C. Damit ist gezeigt, dass die Abschlüsse $\overline{C}^s$ und $\overline{C}^w$ übereinstimmen. ■

4.3 Definition. *Sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.*

- *Die punktweise starke Banachraum-Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ist die lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, die vom Halbnormensystem. $\{p_x \mid x \in \mathcal{X}\}$ mit $p_x(T) = \|Tx\|$ erzeugt wird. Ein Netz $(T_\lambda)_\lambda$ konvergiert in der punktweise starken Banachraum-Topologie gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, wenn $(T_\lambda x)_\lambda$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ in der starken Banachraum-Topologie gegen Tx konvergiert.*

- *Die punktweise schwache Banachraum-Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ist die lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{X}$, die vom Halbnormensystem $\{r_{f,x} \mid x \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{X}'\}$ mit $r_{f,x}(T) = |f(Tx)|$ erzeugt wird. Ein Netz $(T_\lambda)_\lambda$ konvergiert in der punktweise schwachenn Banachraum-Topologie gegen $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, wenn $(T_\lambda x)_\lambda$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ in der schwachen Banachraum-Topologie gegen Tx konvergiert.*

4.4 Theorem. *Sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, und sei $C \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$ eine konvexe Teilmenge. Dann stimmt der Abschluss von C in der punktweise starken Banachraum-Topologie mit dem Abschluss von C in der punktweise schwachen Banachraum-Topologie überein.*

Beweis. Es ist klar, dass der punktweise starke Abschluss von C im punktweise schwachen Abschluss von C enthalten ist (der Beweis verläuft genau wie weiter oben für $C \subseteq \mathcal{X}$). Sei also T im punktweise schwachen Abschluss $\overline{C}^{pw}$ von C. Wir wollen zeigen, dass T auch im punktweise starken Abschluss $\overline{C}^{ps}$ von C liegt. Der Beweis zerfällt in drei Schritte.

Schritt 1: Zu jedem $x \in \mathcal{X}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $S \in C$, so dass $\|Tx - Sx\| < \varepsilon$.
Man setze $\mathcal{L} := \{Sx \mid S \in C\}$. Da $T \in \overline{C}^{pw}$, gibt es ein Netz $(S_\lambda)_\lambda$ in C, das punktweise schwach gegen T konvergiert. Insbesondere konvergiert dann $(S_\lambda x)_\lambda$ schwach gegen Tx, also liegt $Tx \in \overline{\mathcal{L}}^w$. Nach Theorem 4.2 gilt $\overline{\mathcal{L}}^w = \overline{\mathcal{L}}^s$, denn die Teilmenge $\mathcal{L}$ ist konvex. Also ist $Tx \in \overline{\mathcal{L}}^s$, und somit gibt es ein $S \in C$ mit $\|Tx - Sx\| < \varepsilon$.

Schritt 2: Zu je endlich vielen $x_1, ..., x_n \in \mathcal{X}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $S \in C$, so dass $\|Tx_k - Sx_k\| < \varepsilon$ für $k = 1, ..., n$.
Man betrachte die Abbildung $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X}^n)$, die definiert ist durch $\Phi(S)(y_1, ..., y_n) = (Sy_1, ..., Sy_n)$. $\mathcal{B}(\mathcal{X}^n)$ ist ein Banachraum mit der Produktnorm $\|(y_1, ..., y_n)\| = \|y_1\| + ... + \|y_n\|$. Das Bild $\Phi(C)$ ist eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, und es ist leicht einzusehen, dass sowohl $\overline{\Phi(C)}^{ps} = \Phi\left(\overline{C}^{ps}\right)$ als auch $\overline{\Phi(C)}^{pw} = \Phi\left(\overline{C}^{pw}\right)$ gelten (letztere Gleichung gilt, da jedes stetige Funktional f auf $\mathcal{X}^n$ von der Form $f(y_1, ..., y_n) = f_1(y_1) + ... + f_n(y_n)$ ist mit stetigen Funktionalen $f_1, ..., f_n$ auf $\mathcal{X}$). Es ist also $\Phi(T) \in \overline{\Phi(C)}^{pw}$; wir befinden uns somit in der Situation von Schritt 1 und können zu $x := (x_1, ..., x_n)$ ein $S \in C$ wählen, so dass $\|\Phi(T)x - \Phi(S)x\| < \varepsilon$. Damit folgt unmittelbar, dass $\|Tx_k - Sx_k\| < \varepsilon$ für $k = 1, ..., n$.

Schritt 3: Es gibt ein Netz $(T_\lambda)_\lambda$ in C, das in der punktweise starken Banachraum-Topologie gegen T konvergiert.
Sei dazu $\Lambda := \{(\varepsilon, E) \mid \varepsilon > 0 \text{ und } E \subseteq \mathcal{X} \text{ endlich}\}$. Für $\lambda_1 = (\varepsilon_1, E_1)$, und $\lambda_2 = (\varepsilon_2, E_2)$ aus Λ setze man $\lambda_1 \leq \lambda_2 :\iff \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ und $E_1 \subseteq E_2$. Dann ist $(\Lambda, \leq)$ eine gerichtete partielle Ordnung, und zu jedem $\lambda = (\varepsilon, E)$ gibt es nach Schritt 2 ein $T_\lambda \in C$, so dass $\|(T_\lambda - T)x\| < \varepsilon$ für alle $x \in E$. Man sieht nun leicht ein, dass $(T_\lambda)_\lambda$ in der punktweise starken Banachraum-Topologie gegen T konvergiert. ■

4.5 Lemma. *Sei $\mathcal{X}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, und seien τ_1, τ_2 zwei lokalkonvexe Topologien auf $\mathcal{X}$, so dass für jede konvexe Teilmenge $C \subseteq \mathcal{X}$ der τ_1-Abschluss von C mit dem τ_2-Abschluss von C übereinstimmt. Sei nun C eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{X}$, und sei $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in C, dass bezüglich τ_1 gegen ein $x \in \mathcal{X}$ konvergiert. Dann gibt es ein weiteres Netz $(y_\mu)_\mu$ in C, dass sowohl in τ_1 als auch in τ_2 gegen x konvergiert.*

Beweis. Da τ_1, τ_2 lokalkonvexe Topologien sind, besitzt x eine τ_1-Umgebungsbasis $\mathcal{U}$ und eine τ_2-Umgebungsbasis $\mathcal{V}$, die jeweils aus konvexen Teilmengen von $\mathcal{X}$ bestehen. Man definiere nun eine gerichtete partielle Ordnung $(\Lambda', \leq)$ durch $\Lambda' := \{(U, V) \mid U \in \mathcal{U} \text{ und } V \in \mathcal{V}\}$, wobei für $\mu_1 = (U_1, V_1)$, $\mu_2 = (U_2, V_2)$ gelten soll, dass $\mu_1 \leq \mu_2 :\Longleftrightarrow U_1 \supseteq U_2$ und $V_1 \supseteq V_2$.
Sei nun ein $\mu = (U, V) \in \Lambda'$ gegeben. Da U eine τ_1-Umgebung von x ist und $(x_\lambda)_\lambda$ bezüglich τ_1 gegen x konvergiert, gibt es ein $\lambda_0 \in \Lambda$, so dass $x_\lambda \in U$ für alle $\lambda \geq \lambda_0$. Wegen $\lim_{\lambda \geq \lambda_0} x_\lambda = x$ liegt dann $x \in \overline{\operatorname{conv}\{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}}^{\tau_1}$. Nach Voraussetzung gilt nun aber $\overline{\operatorname{conv}\{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}}^{\tau_1} = \overline{\operatorname{conv}\{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}}^{\tau_2}$, also ist auch $x \in \overline{\operatorname{conv}\{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}}^{\tau_2}$. Da V eine τ_2-Umgebung von x ist, gibt es also endlich viele Indizes $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq \lambda_0$ und positive Zahlen $c_1, ..., c_n > 0$ mit $\sum_k c_k = 1$ und $\sum_k c_k x_{\lambda_k} \in V$. Da U konvex ist und $x_{\lambda_1}, ..., x_{\lambda_n} \in U$, liegt dann auch $\sum_k c_k x_{\lambda_k} \in U$. Wir setzen $y_\mu := \sum_k c_k x_{\lambda_k}$. Nach dieser Konstruktion ist $y_\mu \in U \cap V$ für alle $\mu = (U, V) \in \Lambda'$. Man sieht leicht ein, dass dann $(y_\mu)_\mu$ sowohl bezüglich τ_1 als auch bezüglich τ_2 gegen x konvergiert. Da das neue Netz $(y_\mu)_\mu$ aus Konvexkombinationen des alten Netzes $(x_\lambda)_\lambda$ besteht und $(x_\lambda)_\lambda$ ein Netz in C ist, ist auch $(y_\mu)_\mu$ wieder ein Netz in C. Damit ist alles gezeigt. ■

4.6 Definition. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zur Vereinfachung der Notation sei $\widetilde{SOT}$ die lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die von den Halbnormen $\{q_\xi \mid \xi \in \mathcal{H}\}$ mit $q_\xi(T) = \|T^*\xi\|$ erzeugt wird. Ein Netz $(T_\lambda)_\lambda$ konvergiert also genau dann in der S^*OT gegen ein $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, wenn $(T_\lambda)_\lambda$ sowohl in der SOT als auch in der $\widetilde{SOT}$ gegen T konvergiert.*

4.7 Lemma. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, und sei C eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dann ist $\overline{C}^{WOT} = \overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{\widetilde{SOT}}$.*

Beweis. Offenbar ist die SOT nichts anderes, als die punktweise starke Banachraum-Topologie bezüglich $\mathcal{H}$. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz ist außerdem $\mathcal{H}' = \{\langle \cdot \mid \xi \rangle \mid \xi \in \mathcal{H}\}$, so dass auch die WOT mit der punktweise schwachen Banachraum-Topologie bezüglich $\mathcal{H}$ zusammenfällt. Mit Theorem 4.4 folgt also schon $\overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{WOT}$. Es bleibt zu zeigen, dass auch $\overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{\widetilde{SOT}}$ gilt. Dazu nutzen wir aus, dass $\overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{WOT}$ gilt, dass mit C auch C^* konvex ist und dass die Involution WOT-stetig ist. Für jedes $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
& T \in \overline{C}^{SOT} \\
\Longleftrightarrow\ & T \in \overline{C}^{WOT} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda \xrightarrow{WOT} T \\
\Longleftrightarrow\ & \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda^* \xrightarrow{WOT} T^* \\
\Longleftrightarrow\ & \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C^* : T_\lambda \xrightarrow{WOT} T^* \\
\Longleftrightarrow\ & T^* \in \overline{C^*}^{WOT} \\
\Longleftrightarrow\ & T^* \in \overline{C^*}^{SOT} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C^* : T_\lambda \xrightarrow{SOT} T^* \\
\Longleftrightarrow\ & \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda^* \xrightarrow{SOT} T^* \\
\Longleftrightarrow\ & \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda \xrightarrow{\widetilde{SOT}} T \\
\Longleftrightarrow\ & T \in \overline{C}^{\widetilde{SOT}}.
\end{aligned}$$

Damit ist schließlich gezeigt, dass auch $\overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{\widetilde{SOT}}$ gilt. ■

4.8 Theorem. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ist dann C eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, so gilt:*

- $\overline{C}^{WOT} = \overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{S^*OT}$
- $\overline{C}^{\sigma WOT} = \overline{C}^{\sigma SOT} = \overline{C}^{\sigma S^*OT}$

Beweis.

(a) Dass $\overline{C}^{WOT} = \overline{C}^{SOT}$ gilt, wurde bereits im vorangegangenen Lemma gezeigt. Außerdem ist klar, dass $\overline{C}^{S^*OT} \subseteq \overline{C}^{SOT}$ gilt. Es bleibt also nur $\overline{C}^{SOT} \subseteq \overline{C}^{S^*OT}$ nachzuweisen. Sei dazu $T \in \overline{C}^{SOT}$. Dann gibt es ein Netz $(T_\lambda)_\lambda$ in C, dass in der SOT gegen T konvergiert. Nach dem vorangegangenen Lemma stimmen nun für jede konvexe Teilmenge von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der SOT-Abschluss und der $\widetilde{SOT}$-Abschluss überein. Nach Lemma 4.5 gibt es also ein weiteres Netz $(S_\mu)_\mu$ in C, das sowohl in der SOT als auch in der $\widetilde{SOT}$ gegen T konvergiert. Das bedeutet aber gerade, dass $(S_\mu)_\mu$ in der S^*OT gegen T konvergiert, also liegt $T \in \overline{C}^{S^*OT}$. Damit ist gezeigt, dass auch $\overline{C}^{SOT} = \overline{C}^{S^*OT}$ gilt.

(b) Für die drei σ-Topologien nutze man aus, dass aus der Konvexität von C auch die Konvexität von $C^\infty := \{S^\infty \mid S \in C\}$ folgt. Die Inklusionen $\overline{C}^{\sigma S^*OT} \subseteq \overline{C}^{\sigma SOT} \subseteq \overline{C}^{\sigma WOT}$ sind klar. Die Inklusion $\overline{C}^{\sigma WOT} \subseteq \overline{C}^{\sigma SOT}$ zeigt man nun wie folgt: Für alle $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt

$$\begin{aligned}
T \in \overline{C}^{\sigma WOT} &\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda \xrightarrow{\sigma WOT} T \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda^\infty \xrightarrow{WOT} T^\infty \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C^\infty : T_\lambda \xrightarrow{WOT} T^\infty \\
&\iff T^\infty \in \overline{C^\infty}^{WOT} \\
&\iff T^\infty \in \overline{C^\infty}^{SOT} \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C^\infty : T_\lambda \xrightarrow{SOT} T^\infty \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda^\infty \xrightarrow{SOT} T^\infty \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda \xrightarrow{\sigma SOT} T \\
&\iff T \in \overline{C}^{\sigma SOT}.
\end{aligned}$$

Schließlich zeigt man die Inklusion $\overline{C}^{\sigma SOT} \subseteq \overline{C}^{\sigma S^*OT}$ auf dieselbe Weise:

$$\begin{aligned}
T \in \overline{C}^{\sigma SOT} &\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda \xrightarrow{\sigma SOT} T \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda^\infty \xrightarrow{SOT} T^\infty \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C^\infty : T_\lambda \xrightarrow{SOT} T^\infty \\
&\iff T^\infty \in \overline{C^\infty}^{SOT} \\
&\iff T^\infty \in \overline{C^\infty}^{S^*OT} \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C^\infty : T_\lambda \xrightarrow{S^*OT} T^\infty \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda^\infty \xrightarrow{S^*OT} T^\infty \\
&\iff \exists\, (T_\lambda)_\lambda \text{ in } C : T_\lambda \xrightarrow{\sigma S^*OT} T \\
&\iff T \in \overline{C}^{\sigma S^*OT}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. ■