Klassifikation von Typ I-Faktoren

Ramona Wohlleb

Seminar zu Von-Neumann-Algebren
Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Dr. Ulrich Pennig

WS 2010/11

Klassifikation von Typ I-Faktoren

Satz 1:
Sei M ein Faktor und $0 \neq p, q \in M$ zwei Projektionen. Dann existiert ein unitäres $u \in M$ mit $puq \neq 0$.

Beweis:
Nehmen wir an, es würde für alle unitären $u \in M$ $puq = 0$ gelten. Dann gilt auch $u^*puq = 0$ für alle $u \in M$ unitär.
Betrachten wir nun die Projektion

$$\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu.$$

(Beachte dabei, dass u^*pu wegen

$$(u^*pu)^2 = u^*puu^*pu = u^*p^2u = u^*pu = u^*p^*u = (u^*pu)^*$$

eine Projektion ist.)
Sei $\xi \in \mathcal{H}$ beliebig. Dann gilt $u^*puq\xi = 0$ für alle $u \in M$ unitär. Somit folgt

$$q\xi \in \bigcap_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} (u^*pu\mathcal{H})^\perp = \left(\sum_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu\mathcal{H} \right)^\perp = \left(\overline{\sum_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu\mathcal{H}} \right)^\perp.$$

Daher gilt $\left(\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu \right) q\xi = 0$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$ und folglich $\left(\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu \right) q = 0.$
Sei nun $w \in M$ unitär. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left(w^* \left(\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w \right)^* \\
= \quad & w^* \left(\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu \right)^* w \\
= \quad & w^* \left(\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w \\
= \quad & w^* \left(\bigvee_{\substack{u \in M \\ \text{unitär}}} u^*pu \right)^2 w
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= w^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) ww^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w \\
&= \left(w^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w \right)^2 .
\end{aligned}
$$

Somit ist $w^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w$ eine Projektion.

Da w und w^* bijektiv auf $\mathcal{H}$ operieren, gilt $w\mathcal{H} = \mathcal{H} = w^*\mathcal{H}$. Somit folgt

$$
\begin{aligned}
& w^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w\mathcal{H} \\
&= w^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) \mathcal{H} \\
&= w^* \overline{\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\mathcal{H}} \\
&= \overline{\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} w^*u^*pu\mathcal{H}} \\
&= \overline{\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} w^*(uw^*)^*p(uw^*)\mathcal{H}} \\
&= \overline{\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} w^*wu^*puw^*\mathcal{H}} \\
&= \overline{\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*puw^*\mathcal{H}} \\
&= \overline{\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$
w^* \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right) w = \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \right)
$$

und folglich, da w unitär ist

$$\left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\right) w = w \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\right).$$

Da sich jedes Element aus M als Summe von vier unitären Elementen schreiben lässt, kommutiert $\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*puq$ mit allen Elementen aus M. Somit gilt

$$\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu \in Z(M) \overset{M \text{ Faktor}}{=} \mathbb{C}\cdot 1.$$

Wäre $\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu = 0$, so wäre

$$\sum_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\mathcal{H} = 0$$

und folglich $u^*pu\mathcal{H} = 0$ für alle $u \in M$ unitär. Insbesondere ist dann $p\mathcal{H} = 1\cdot p\cdot 1\mathcal{H} = 0$, was der Voraussetzung $p \neq 0$ widerspricht.
Daher gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu = \lambda \cdot 1.$$

Damit folgt

$$0 = \left(\bigvee_{\substack{u\in M\\ \text{unitär}}} u^*pu\right) q = \lambda q.$$

Wegen $\lambda \neq 0$ ist dann $q = 0$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Somit ist unsere Annahme falsch und es folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 2:
Sei M ein Faktor und seien $0 \neq p, q \in M$ zwei Projektionen. Dann existiert eine partielle Isometrie $0 \neq u \in M$ mit $uu^* \leq p$ und $u^*u \leq q$.

Beweis:
Nach Satz 1 existiert ein $x \in M$ unitär mit $pxq \neq 0$. Betrachten wir nun die Polarzerlegung

$$pxq = u|pxq|$$

von pxq. Dann ist $u \in M$ eine partielle Isometrie mit Definitionsbereich

$$u^*\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(pxq)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(pxq)^*} = \overline{\mathrm{Im}q^*x^*p^*} = \overline{\mathrm{Im}qx^*p}$$

und Wertebereich

$$u\mathcal{H} = \mathrm{Ker}((pxq)^*)^\perp = \overline{\mathrm{Im}pxq}.$$

(vergleiche auch [J, S.9 Exercise 2.3.2]). Wegen $pxq \neq 0$ gilt auch $u \neq 0$. Mit u ist auch u^* eine partielle Isometrie (vergleiche auch [J, S.7 Exercise 2.1.12]). Daher sind uu^* und u^*u Projektionen. Es gilt

$$uu^*\mathcal{H} \subseteq u\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Im}pxq} \subseteq \overline{\mathrm{Im}p} = \overline{p\mathcal{H}} = p\mathcal{H}$$

und

$$u^*u\mathcal{H} \subseteq u^*\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Im}qx^*p} \subseteq \overline{\mathrm{Im}q} = \overline{q\mathcal{H}} = q\mathcal{H}.$$

Folglich ist $uu^* \leq p$ und $u^*u \leq q$. □

Definition 3:
Sei M eine Von-Neumann-Algebra. Eine Projektion $0 \neq p \in M$ heißt minimal, wenn für alle Projektionen $q \in M$ mit $q \leq p$ entweder $q = 0$ oder $q = p$ gilt.

Lemma 4:
Sei M eine Von-Neumann-Algebra und $0 \neq p \in M$ eine Projektion. Dann ist p genau dann minimal, wenn $pMp = \mathbb{C}p$ gilt.

Beweis:

$\Leftarrow$: Sei $q \in M$ eine Projektion mit $q \leq p$. Dann gilt $q = pqp \in pMp = \mathbb{C}p$. Somit gilt $q = \lambda p$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Wegen

$$\lambda p = q = q^* = (\lambda p)^* = \overline{\lambda}p^* = \overline{\lambda}p$$

gilt $\lambda \in \mathbb{R}$ und wegen

$$\lambda p = q = q^2 = (\lambda p)^2 = \lambda^2 p^2 = \lambda^2 p$$

gilt daher $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$. Wir erhalten somit $q = 0$ oder $q = p$. Folglich ist p minimal.

$\Rightarrow$: Sei $q \in pMp$ eine beliebige Projektion. Dann existiert ein $x \in M$ mit $q = pxp$. Dann gilt

$$q\mathcal{H} = pxp\mathcal{H} \subseteq p\mathcal{H}.$$

Folglich ist $q \leq p$. Da p minimal ist, folgt $q = 0$ oder $q = p$. In jedem Fall gilt $q \in \mathbb{C}p$. Da pMp als Von-Neumann-Algebra von seinen Projektionen erzeugt wird (vergleiche [J, S.19 EP1]), folgt $pMp \subseteq \mathbb{C}p$.
Da andererseits $\mathbb{C}p = \mathbb{C}p^2 = p\mathbb{C}p \subseteq pMp$ gilt, folgt $\mathbb{C}p = pMp$. □

Definition 5:
Ein Faktor, der eine minimale Projektion besitzt, heißt Faktor vom Typ I.

Satz 6:
Sei M ein Faktor vom Typ I, $M \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es Hilberträume $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ und einen unitären Operator

$$u : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

mit $uMu^* = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes 1$.

Beweis:

Schritt 1: Wir zeigen zunächst, dass eine maximale Familie von paarweise orthogonalen, minimalen Projektionen existiert. Dazu benötigen wir das Lemma von Zorn. Sei

$$A := \{\{p_i\}_{i\in I} | p_i \text{ minimale Projektion in } M \text{ und } p_i p_j = 0 \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } i \neq j\}.$$

Dann ist A durch $\subseteq$ partiell geordnet und nichtleer, da M ein Faktor vom Typ I ist. Sei $T \subseteq A$ eine Kette in A. Dann ist $\bigcup_{t\in T} t$ eine Familie von minimalen Projektionen. Sind $p, q \in \bigcup_{t\in T} t$ Projektionen mit $p \neq q$. Dann existieren $t, t' \in T$ mit $p \in t$ und $q \in t'$. Da T total geordnet ist, gilt $t \subseteq t'$ oder $t' \subseteq t$. Gelte o.B.d.A. $t' \subseteq t$. Dann gilt $p, q \in t$. Wegen $t \in A$ folgt dann $pq = 0$. Somit gilt $\bigcup_{t\in T} t \in A$.
Offensichtlich gilt $t' \subseteq \bigcup_{t\in T} t$ für alle $t' \in T$. Somit besitzt T eine obere Schranke in A. Nach dem Lemma von Zorn besitzt A daher ein maximales Element $\{p_i\}_{i\in I}$.

Schritt 2: Wir wollen nun zeigen, dass $\bigvee_{i\in I} p_i = 1$ gilt.
Angenommen, es gilt $\bigvee_{i\in I} p_i \neq 1$, so ist $1 - \bigvee_{i\in I} p_i \neq 0$. Wähle $i_0 \in I$ beliebig, aber fest. Nach Korollar 2 existiert dann eine partielle Isometrie $0 \neq v \in M$ mit

$$vv^* \leq p_{i_0} \quad \text{und} \quad v^*v \leq 1 - \bigvee_{i\in I} p_i.$$

Da p_{i_0} minimal ist, gilt $vv^* = 0$ oder $vv^* = p_{i_0}$. Wäre $vv^* = 0$, so wäre $0 = ||vv^*|| = ||v||^2$ und somit auch $v = 0$. Da jedoch $v \neq 0$ gilt, muss $vv^* = p_{i_0}$ gelten. Somit ist

auch vv^* minimal.
Damit ist auch v^*v minimal. Sei nämlich $q \in M$ eine Projektion mit $q \leq v^*v$. Dann ist $q = qv^*vq$ und $q = v^*vqv^*v$. Es gilt

$$(vqv^*)^* = vq^*v^* = vqv^* = vqv^*vqv^* = (vqv^*)^2.$$

Somit ist vqv^* eine Projektion. Wegen $q\mathcal{H} \subseteq v^*v\mathcal{H} \subseteq v^*\mathcal{H}$ gilt

$$vqv^*\mathcal{H} \subseteq vq\mathcal{H} \subseteq vv^*\mathcal{H}.$$

Somit gilt $vqv^* \leq vv^*$. Da vv^* minimal ist, gilt $vqv^* = 0$ oder $vqv^* = vv^*$.
Somit gilt

$$q = v^*vqv^*v = \begin{cases} v^*0v = 0, & \text{falls } vqv^* = 0 \\ v^*vv^*v = (v^*v)^2 = v^*v, & \text{falls } vqv^* = vv^* \end{cases}.$$

Also ist v^*v minimal.
Sei $j \in I$ beliebig und $\xi \in \mathcal{H}$. dann gilt $p_j\xi \in p_j\mathcal{H} \subseteq \overline{\sum_{i\in I} p_i\mathcal{H}}$ und daher

$$\left(1 - \bigvee_{i\in I} p_i\right) p_j\xi = p_j\xi - \left(\bigvee_{i\in I} p_i\right) p_j\xi = p_j\xi - p_j\xi = 0.$$

Also gilt

$$p_j\mathcal{H} \subseteq \operatorname{Ker}\left(1 - \bigvee_{i\in I} p_i\right). \tag{1}$$

Wegen $v^*v \leq 1 - \bigvee_{i\in I} p_i$ gilt

$$\operatorname{Ker}(v^*v)^\perp = v^*v\mathcal{H} \subseteq \left(1 - \bigvee_{i\in I} p_i\right)\mathcal{H} = \operatorname{Ker}\left(1 - \bigvee_{i\in I} p_i\right)^\perp \tag{2}$$

und folglich

$$\operatorname{Ker}\left(1 - \bigvee_{i\in I} p_i\right) \subseteq \operatorname{Ker}(v^*v).$$

Somit gilt auch $p_j\mathcal{H} \subseteq \operatorname{Ker}(v^*v)$; d.h. es gilt $v^*vp_j = 0$.
Daher ist auch $\{p_i\}_{i\in I} \cup \{v^*v\}$ eine Familie paarweise orthogonaler, minimaler Projektionen. Da jedoch $\{p_i\}_{i\in I}$ eine maximale derartige Familie ist und $\{p_i\}_{i\in I} \subseteq \{p_i\}_{i\in I} \cup \{v^*v\}$, gilt $v^*v = p_j$ für ein $j \in I$. Dann folgt

$$p_j = p_j^2 = v^*vp_j = 0.$$

Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass p_j als minimale Projektion nicht 0 ist. Somit ist unsere Annahme falsch und es folgt

$$1 = \bigvee_{i \in I} p_i. \tag{3}$$

Anders ausgedrückt, gilt

$$\mathcal{H} = \overline{\sum_{i \in I} p_i \mathcal{H}}. \tag{4}$$

<u>Schritt 3:</u> Wir wollen nun zeigen, dass $\sum\limits_{i,j \in I} p_i a p_j = a$ für alle $a \in M$ gilt.
Dabei ist unter $\sum\limits_{i,j \in I} p_i a p_j$ der Grenzwert des Netzes

$$\left(\sum_{\substack{i \in J_1 \\ j \in J_2}} p_i a p_j \right)_{J_1, J_2 \subseteq I \text{ endlich}}$$

in der starken Operatortopologie zu verstehen.
Betrachte zunächst das Netz $\left(\sum\limits_{i \in J} p_i \right)_{J \subseteq I \text{endlich}}$. Für $J \subseteq I$ endlich gilt

$$\left(\sum_{i \in J} p_i \right)^* = \sum_{i \in J} p_i^* = \sum_{i \in J} p_i = \sum_{i,j \in J} p_i p_j = \left(\sum_{i \in J} p_i \right)^2 .$$

Daher ist $\sum\limits_{i \in J} p_i$ eine Projektion und es gilt $\left\| \sum\limits_{i \in J} p_i \right\| = 1$. Also liegt obiges Netz im Einheitsball von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, also einer beschränkten Menge.
Für $\xi \in \mathcal{H}$ mit $\xi = \sum\limits_{i \in I} \xi_i$ für $\xi_i \in p_i \mathcal{H}$ gilt

$$\sum_{i \in I} p_i \xi = \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in I} \xi_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} p_i \xi_j = \sum_{j \in I} \xi_j = \xi.$$

Somit konvergiert $\left(\sum\limits_{i \in J} p_i \right)_{J \subseteq I \text{endlich}}$ stark gegen 1.
Da die Multiplikation separat stark stetig ist, konvergiert $\left(\sum\limits_{i \in J} p_i a \right)_{J \subseteq I \text{endlich}}$ stark gegen $1a = a$.
Da die Multiplikation auf beschränkten Mengen in beiden Argumenten stetig ist

(vergleiche [J, S.19 Exercise 3.4.1]), konvergiert das Netz $\left(\sum_{\substack{i\in J_1\\ j\in J_2}} p_i a p_j\right)_{J_1,J_2\subseteq I \text{ endlich}}$ somit stark gegen $a1 = a$.
Also folgt

$$a = \sum_{i,j\in I} p_i a p_j.$$

<u>Schritt 4</u>: Sei nun $i \in I$ beliebig. Da $p_{i_0}, p_i \neq 0$ Projektionen sind, existiert nach Korollar 2 eine partielle Isometrie $0 \neq e_{i_0,i} \in M$ mit

$$e_{i_0,i}e_{i_0,i}^* \leq p_{i_0} \quad \text{und} \quad e_{i_0,i}^* e_{i_0,i} \leq p_i.$$

Genau wie oben gilt auch hier wegen $e_{i_0,i} \neq 0$ auch $e_{i_0,i}e_{i_0,i}^*, e_{i_0,i}^* e_{i_0,i} \neq 0$. Da p_{i_0} und p_i minimal sind, gilt daher

$$e_{i_0,i}e_{i_0,i}^* = p_{i_0} \quad \text{und} \quad e_{i_0,i}^* e_{i_0,i} = p_i. \tag{5}$$

Es gilt für alle $i \in I$ $p_{i_0} e_{i_0,i} = e_{i_0,i}$. Sei nämlich $\xi \in \mathcal{H}$ mit $e_{i_0,i}\xi \in p_{i_0}\mathcal{H}$, so folgt

$$p_{i_0} e_{i_0,i}\xi = e_{i_0,i}\xi.$$

Ist andererseits $\xi \in \mathcal{H}$ mit $e_{i_0,i}\xi \in (p_{i_0}\mathcal{H})^\perp$, so gilt

$$0 = p_{i_0} e_{i_0,i}\xi = e_{i_0,i}e_{i_0,i}^* e_{i_0,i}\xi$$

und daher

$$e_{i_0,i}^* e_{i_0,i}\xi \in \mathrm{Ker}(e_{i_0,i}) = \mathrm{Im}(e_{i_0,i}^*)^\perp.$$

Dann folgt aber schon

$$e_{i_0,i}^* e_{i_0,i}\xi \in e_{i_0,i}^*\mathcal{H} \cap (e_{i_0,i}^*\mathcal{H})^\perp = \{0\}.$$

Dann ergibt sich jedoch

$$e_{i_0,i}\xi \in \mathrm{Ker}(e_{i_0,i}^*) = \mathrm{Im}(e_{i_0,i})^\perp$$

und damit

$$e_{i_0,i}\xi \in e_{i_0,i}\mathcal{H} \cap (e_{i_0,i}\mathcal{H})^\perp = \{0\};$$

d.h. wir erhalten

$$p_{i_0} e_{i_0,i}\xi = 0 = e_{i_0,i}\xi.$$

Wegen $\mathcal{H} = p_{i_0}\mathcal{H} \oplus (p_{i_0}\mathcal{H})^\perp$ folgt dann

$$e_{i_0,i} = p_{i_0}e_{i_0,i} = e_{i_0,i}e^*_{i_0,i}e_{i_0,i} = e_{i_0,i}p_i. \tag{6}$$

Betrachten wir nun $e_{i_0,j}e^*_{i_0,i}$ für $i \neq j$. Es gilt

$$\begin{aligned} e^*_{i_0,i}\mathcal{H} &= (e_{i_0,i}p_i)^*\mathcal{H} = p_i e^*_{i_0,i}\mathcal{H} \subseteq p_i\mathcal{H} \subseteq (p_j\mathcal{H})^\perp \\ &\subseteq (p_j e_{i_0,j}\mathcal{H})^\perp = (e^*_{i_0,j}\mathcal{H})^\perp = \mathrm{Ker} e_{i_0,j}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$e_{i_0,j}e^*_{i_0,i} = 0. \tag{7}$$

<u>Schritt 5:</u> Wir wollen nun zeigen, dass M von den $e_{i_0,i}$ erzeugt wird. Sei dazu $a \in M$ beliebig. Nach Schritt 3 wissen wir, dass

$$a = \sum_{i,j\in I} p_i a p_j = \sum_{i,j\in I} e^*_{i_0,i}e_{i_0,i}ae^*_{i_0,j}e_{i_0,j} \tag{8}$$

gilt.
Für alle $i, j \in I$ gilt wegen (6)

$$e_{i_0,i}ae^*_{i_0,j} = p_{i_0}e_{i_0,i}ae^*_{i_0,j}p_{i_0} \in p_{i_0}Mp_{i_0} \overset{\text{Lemma 4}}{=} \mathbb{C}p_{i_0}.$$

Sei nun $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}$ mit $e_{i_0,i}ae^*_{i_0,j} = \lambda_{i,j}p_{i_0}$. Aus (8) erhalten wir dann

$$a = \sum_{i,j\in I} e^*_{i_0,i}e_{i_0,i}ae^*_{i_0,j}e_{i_0,j} = \sum_{i,j\in I} e^*_{i_0,i}\lambda_{i,j}p_{i_0}e_{i_0,j} = \sum_{i,j\in I} \lambda_{i,j}e^*_{i_0,i}e_{i_0,j}e^*_{i_0,j}e_{i_0,j}.$$

Also wird M von den $e_{i_0,i}$ erzeugt.

<u>Schritt 6:</u> Wir wollen nun den gesuchten unitären Operator konstruieren. Setze $\mathcal{H}_1 := l^2(I, \mathbb{C})$ und $\mathcal{H}_2 := p_{i_0}\mathcal{H}$. Dann gilt $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = l^2(I, p_{i_0}\mathcal{H})$. Nun definiere

$$w : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}; \quad f \mapsto \sum_{i\in I} e^*_{i_0,i}f(i).$$

Dann ist w unitär. Um dies zu zeigen, bestimmen wir zunächst w^*. Für alle $\xi \in \mathcal{H}$

und alle $f \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \langle f(i), (w^*\xi)(i) \rangle &= \langle f, w^*\xi \rangle \\
&= \langle wf, \xi \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i \in I} e^*_{i_0,i} f(i), \xi \right\rangle \\
&= \sum_{i \in I} \left\langle e^*_{i_0,i} f(i), \xi \right\rangle \\
&= \sum_{i \in I} \langle f(i), e_{i_0,i}\xi \rangle .
\end{aligned} \tag{9}$$

Somit gilt

$$w^* : \mathcal{H} \to l^2(I, p_{i_0}\mathcal{H}); \quad \xi \mapsto (e_{i_0,i}\xi)_{i \in I}.$$

Sei $\xi \in \mathcal{H}$ mit $\xi = \sum_{i \in I} \xi_i$ für $\xi_i \in p_i\mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
ww^*\xi &= w(e_{i_0,i}\xi)_{i \in I} \\
&= \sum_{i \in I} e^*_{i_0,i} e_{i_0,i}\xi \\
&= \sum_{i \in I} p_i\xi \\
&= \sum_{i \in I} p_i \sum_{j \in I} \xi_j \\
&= \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} p_i\xi_j \\
&= \sum_{j \in I} \xi_j \\
&= \xi.
\end{aligned}$$

Da solche ξ wegen (4) $\mathcal{H}$ erzeugen, folgt $ww^* = 1$.

Für $f \in l^2(I, p_{i_0}\mathcal{H})$ gilt

$$\begin{aligned}
w^*wf &= w^*\left(\sum_{i\in I} e^*_{i_0,i} f(i)\right) \\
&= \left(e_{i_0,j}\left(\sum_{i\in I} e^*_{i_0,i} f(i)\right)\right)_{j\in I} \\
&= \left(\sum_{i\in I} e_{i_0,j} e^*_{i_0,i} f(i)\right)_{j\in I} \\
&\overset{(7)}{=} (e_{i_0,j} e^*_{i_0,j} f(j))_{j\in I} \\
&= \left(p_{i_0} \underbrace{f(j)}_{\in p_{i_0}\mathcal{H}}\right)_{j\in I} \\
&= (f(j))_{j\in I} \\
&= f.
\end{aligned}$$

Somit ist w unitär. Sei $u := w^*$. Dann ist auch u unitär.
Es bleibt also $uMu^* = \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes 1$ zu zeigen.
Sei dazu $a \in M$ und $f \in l^2(I, p_{i_0}\mathcal{H})$ beliebig. Dann gilt mit Schritt 5

$$\begin{aligned}
uau^*f &= w^*awf \\
&= w^*a\left(\sum_{k\in I} e^*_{i_0,k} f(k)\right) \\
&= w^* \sum_{i,j,k\in I} \lambda_{ij} e^*_{i_0,i} e_{i_0,j} e^*_{i_0,j} e_{i_0,j} e^*_{i_0,k} f(k) \\
&\overset{(7)}{=} w^* \sum_{i,j\in I} \lambda_{ij} e^*_{i_0,i} e_{i_0,j} e^*_{i_0,j} e_{i_0,j} e^*_{i_0,j} f(j) \\
&= w^* \sum_{i,j\in I} \lambda_{ij} e^*_{i_0,i} p^2_{i_0} f(j) \\
&= w^* \sum_{i,j\in I} \lambda_{ij} e^*_{i_0,i} p_{i_0} \underbrace{f(j)}_{\in p_{i_0}\mathcal{H}} \\
&= w^* \sum_{i,j\in I} \lambda_{ij} e^*_{i_0,i} f(j) \\
&= \left(e_{i_0,k} \sum_{i,j\in I} \lambda_{ij} e^*_{i_0,i} f(j)\right)_{k\in I}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i,j \in I} \lambda_{ij} e_{i_0,k} e_{i_0,i}^* f(j) \right)_{k \in I} \\
&\overset{(7)}{=} \left(\sum_{j \in I} \lambda_{kj} e_{i_0,k} e_{i_0,k}^* f(j) \right)_{k \in I} \\
&\overset{(7)}{=} \left(\sum_{j \in I} \lambda_{kj} p_{i_0} f(j) \right)_{k \in I} \\
&\overset{(7)}{=} \left(\sum_{j \in I} \lambda_{kj} f(j) \right)_{k \in I} .
\end{aligned}
$$

Somit gilt $uau^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) \otimes 1$. □

Literatur

[J] V. Jones: *Von Neumann Algebras*, UC Berkeley Mathematics, 2009.