Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 12/13

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 13.11.2012, 12 Uhr in den Briefkästen — Blatt 5

Aufgabe 1. (a) Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar und nach Bogenlänge parametrisiert. Zeige: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\langle c''(t), c'(t)\rangle = 0$.

(b) Die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ beschreibe die Bewegung eines Teilchens mit konstanter Geschwindigkeit v entlang eines Kreises vom Radius r um $0 \in \mathbb{R}^2$. Man zeige, dass für die Beschleunigung c'' gilt: $c''(t) = -\frac{v^2}{r^2}c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

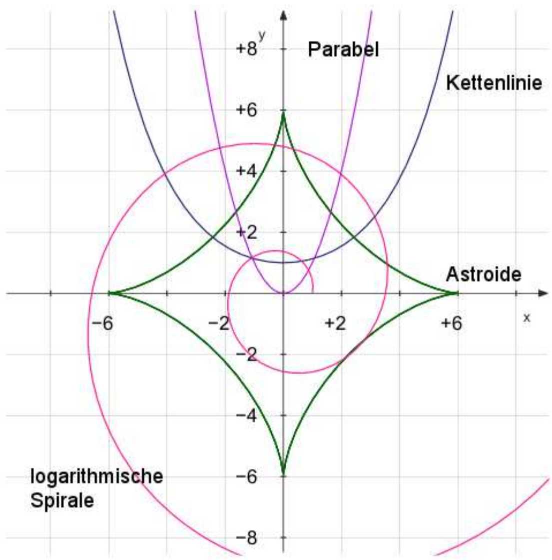
Aufgabe 2. Bestimme die Bogenlänge s

(a) der Kettenlinie $y(x) = a\cosh\frac{x}{a}$ für $0 \le x \le x_0$, wobei $a > 0$.

(b) der Astroide $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

(c) der logarithmischen Spirale, gegeben in Polarkoordinaten durch $r(\phi) = ae^{m\phi}$ für $0 \le \phi \le \phi_0$, wobei $a, m > 0$.

(d) des Parabelabschnitts $y(x) = \frac{x^2}{2p}$ für $0 \le x \le x_0$, wobei $p > 0$.



(Die Kurven aus Aufgabe 2 mit teilweise geänderten Parametern)

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $c \in \mathcal{C}^2([a, b])$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\colon [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (t, q, v) \mapsto q\sqrt{1 + v^2},$$

für alle $t \in [a, b]$. Zeige:

(a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $t \in]a, b[$ gilt:

$$\frac{c(t)c'(t)^2}{\sqrt{1 + c'(t)^2}} - c(t)\sqrt{1 + c'(t)^2} = -\gamma.$$

(*Hinweis:* Energieerhaltungssatz.)

(b) $c(t) = \gamma\sqrt{1 + c'(t)^2}$ für alle $t \in [a, b]$.

(*Bemerkung:* Das zugehörige Variationsproblem besteht darin, für eine Kurve zwischen vorgegebene Randpunkten den Oberflächeninhalt der zugehörige Rotationsfläche (bei Drehung um die x-Achse) zu minimieren.)

Aufgabe 4. Durch eine in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definite symmetrische Matrix $G(x) = G^t(x) = (g_{ij}(x))_{ij} \in GL(n, \mathbb{R})$ werde punktweise ein allgemeines Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle_{G(x)}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch $\langle v, w\rangle_{G(x)} := \langle v, G(x)w\rangle$ definiert. Wir betrachten die zugehörige Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t, q, v) \mapsto \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_{G(q)},$$

Sei $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))$, eine auf $]a, b[$ zweimal differenzierbare Lösung der zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_k}\right)(t, c(t), c'(t)) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right)(t, c(t), c'(t)) = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n, \quad t \in]a, b[.$$

(a) Zeigen Sie, dass dann für alle $k = 1, \ldots, n$ und $t \in]a, b[$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} g_{kj}(c(t))c_j''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}(c(t))c_i'(t)c_j'(t) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(t))c_i'(t)c_j'(t) = 0.$$

(b) Benutzen Sie (a), die Symmetrie $G = G^t$ und die inverse Matrix $G^{-1}(x) = (h_{lk}(x))_{lk} \in GL(n, \mathbb{R})$, um folgende *Geodätengleichung* zu erhalten:

$$0 = c_l''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^l(c(t))c_i'(t)c_j'(t) \quad \text{für } l = 1, \ldots, n, \quad t \in]a, b[,$$

wobei $\Gamma_{ij}^l(c(t)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} h_{lk}(c(t))\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}(c(t)) + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}(c(t)) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(c(t))\right)$.

(*Bemerkung:* In der allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt die *Metrik G* das Gravitationsfeld und die Geodätengleichung die Bahnen von Testteilchen in solch einem Feld.)