Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 12/13**
Dr. T. Timmermann

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 27.11.2012, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 7

Achtung: Aufgabe 4 befindet sich auf der Rückseite!

Aufgabe 1. Sei $A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = A(t)x(t)$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Sei I ein Intervall, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : I \to M(2, \mathbb{C})$ stetig und $x\colon I \to \mathbb{C}^2$ eine Lösung der homogenen DGL $x'(t) = A(t)x(t)$ mit $x_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(a) Zeigen Sie: Eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}^2$ der Form $y(t) = \phi(t)x(t) + z(t)$ mit $\phi\colon I \to \mathbb{C}$ und $z(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ erfüllt $y'(t) = A(t)y(t)$ genau dann, wenn

$$a_{12}(t)z_2(t) - \phi'(t)x_1(t) = 0 \quad \text{und} \quad z_2'(t) = \left(a_{22}(t) - a_{12}(t)\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) z_2(t).$$

(b) Die Funktion y der Form wie in (a) ist linear unabhängig von x.

(c) Finden Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem für

$$x'(t) = \begin{pmatrix} t^{-1} & -1 \\ t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} x(t), \quad t \neq 0.$$

(*Hinweis:* Eine Lösung ist gegeben durch $x(t) = (t^2, -t)$.)

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir versehen $M(n, \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\| \; \|_\infty$, gegeben durch $\|(a_{ij})_{i,j}\|_\infty := \sup_{i,j} |a_{ij}|$. Sei $B = (b_{ij})_{i,j} \in M(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $|\prod_{i=1}^n (1 + b_{ii}) - 1 - \operatorname{Spur}(B)| \leq 2^n \|B\|_\infty^2$, falls $\|B\|_\infty \leq 1$.

(b) $|\prod_{k=1}^n (\delta_{k,\sigma(k)} + b_{k\sigma(k)})| \leq 2^n \|B\|_\infty^2$, falls $\sigma \in S_n$ eine Permutation ist mit $\sigma(i) \neq i$ für ein i sowie $\|B\|_\infty \leq 1$.

(c) $\det\colon M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist an der Stelle $E_n \in M(n, \mathbb{R})$ differenzierbar und $(D \det(E_n))(B) = \operatorname{Spur}(B)$.
(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $\det(E_n + B) = \det(E_n) + \operatorname{Spur}(B) + o(\|B\|_\infty)$.)

(d) $\det\colon M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist an jeder Stelle $A \in GL(n, \mathbb{R})$ differenzierbar und $(D \det(A))(B) = \det(A)\operatorname{Spur}(A^{-1}B)$. (*Hinweis:* $\|A^{-1}B\|_\infty \leq n\|A^{-1}\|_\infty \|B\|_\infty$.)

Aufgabe 4. (a) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktion $x(t) := \det(\exp(tA))$ die Differentialgleichung $x'(t) = x(t)\mathrm{Spur}(A)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt, und folgern Sie, dass $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$.

(b) Sei $\Phi\colon I \to GL(n, \mathbb{R})$ ein Lösungs-Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $x'(t) = A(t)x(t)$ und $W := \det \circ \Phi\colon I \to \mathbb{R}$ die zugehörige Wronski-Determinante. Zeigen Sie, dass dann $W'(t) = W(t)\mathrm{Spur}(A(t))$.

(*Hinweis:* Beachten Sie, dass $\mathrm{Spur}(XY) = \mathrm{Spur}(YX)$.)