Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

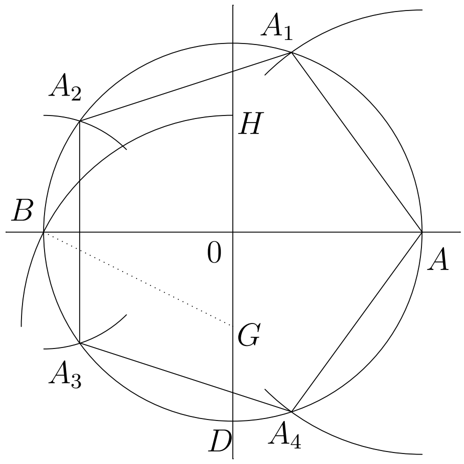
Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 14.11.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal:

- Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.
- Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.
- Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y$-Achse), welcher innerhalb S liegt, sei H.
- Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.
- Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann beweisen (a),(b),(c): (A, A_1, A_2, A_3, A_4) sind die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.



(a) Zeigen Sie: Die Länge $|\overline{0H}| =: h = g^{-1}$ ist das Inverse des goldenen Schnittes, $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(b) Zeigen Sie, daß die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

Hinweis: Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.

(c) Beweisen Sie die Identitäten $(z_1)^2 = z_2$, $(z_2)^2 = z_4$, $z_2z_3 = 1$ und $z_1z_4 = 1$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie, falls existent, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $M_a = \left\{ \frac{n+2}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$

(b) $M_b = \left\{ \binom{-1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$

(c) $M_c = \left\{ 4^{(-1)^n n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$

Aufgabe 3. Betrachtet werde für $t, s \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + tx_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + tx_3 &= 1 \\ tx_1 + 4x_2 - 2x_3 &= s \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie alle Paare (t, s), für die das LGS lösbar ist.

(b) Zu $t = 1$ ist das LGS für genau ein $s \in \mathbb{R}$ lösbar. Lösen Sie das LGS für $t = 1$ und das so bestimmte s.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & -4 \\ 3 & 4 & -5 & -8 \\ 4 & 7 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$