## Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2013 bis 10h00 in den Briefkästen

Blatt 5

Aufgabe 1. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
,  $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Zeigen Sie:  $(v_1, v_2, v_3)$  ist Basis des  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Bestimmen Sie  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$  mit  $w = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i$ .
- (c) Für welche  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_3)$ ?

**Aufgabe 2.** Sei  $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbb{R}^4$  und  $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$  mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von  $U, V, U + V, U \cap V$  sowie eine Basis von  $U \cap V$ .

**Aufgabe 3.** Eine Matrix  $A=(a_{ij})\in M(n\times n,K)$  heißt symmetrisch, falls  $a_{ij}=a_{ji}$  für alle  $i,j=1,\ldots,n$ , und schief-symmetrisch, falls  $a_{ij}=-a_{ji}$  für alle  $i,j=1,\ldots,n$ .

- (a) Zeigen Sie, daß alle symmetrischen bzw. alle schief-symmetrischen Matrizen je einen Untervektorraum von  $M(n \times n, K)$  bilden, und bestimmen Sie dessen Dimension.
- (b) Zeigen Sie, daß es für jede Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  genau eine symmetrische Matrix  $A_+$  und eine schief-symmetrische Matrix  $A_-$  gibt mit  $A = A_+ + A_-$ .

**Aufgabe 4.** Begründen Sie, weshalb die unten angegebenen Folgen  $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ ,  $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$  konvergent bzw. divergent sind, und bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert:

(a) 
$$a_n = \frac{1}{(\sqrt[k]{2})^n} \binom{n}{k}$$
,  $k \in \mathbb{N}^{\times}$  (b)  $b_n = \left(\frac{7 + 24i}{25}\right)^n$   
(c)  $c_n = \sqrt[n]{\sum_{k=0}^n x^{n-k} 2^k}$ ,  $x \in \mathbb{R}_+^{\times}$