Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **WS 2014/2015**

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 31.10.2014 bis 10h00, in den Briefkästen — Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Bestimmen Sie das m-te Taylorpolynom T_m von f mit Entwicklungspunkt $(1,0)$.

(b) Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ konvergiert $T_m(x,y) \to f(x,y)$ für $m \to \infty$?

Aufgabe 2. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $f = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{t}} : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$(\mathrm{rot} f)(x) := (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$$

die *Rotation* von f im Punkte $x \in G$. Zeigen Sie: Ist $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, so gilt

$$\mathrm{rot}(Dg) = 0.$$

Aufgabe 3. Geben Sie die lokalen Extrema folgender Funktionen an:

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2x$ auf $\mathbb{R}^2$.

(b) $g(x,y) = \frac{x+y}{y}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$.

(c) $h(x,y) = (2 + \cos x) \sin y$ auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4.

Seien $n, m, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\Phi : \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ multilinear, d.h. in jeder Komponente $j \in \{1, \dots, k\}$ gilt $\Phi(\dots, \lambda v_j + \mu w_j, \dots) = \lambda \Phi(\dots, v_j, \dots) + \mu \Phi(\dots, w_j, \dots)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v_j, w_j \in \mathbb{R}^{n_j}$.

(a) Zeigen Sie: Sind $f_j : G \longrightarrow \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, \dots, k$, in $x_0 \in G$ total differenzierbar, so auch $\Phi(f_1, \dots, f_k) : G \longrightarrow \mathbb{R}^m, x \longmapsto \Phi(f_1(x), \dots, f_k(x))$, und es gilt für $v \in \mathbb{R}^n$:

$$(D\Phi(f_1, \dots, f_n))(x_0) \circ v = \sum_{j=1}^{n} \Phi(f_1(x_0), \dots, (Df_j)(x_0) \circ v, \dots, f_k(x_0)).$$

Wieso handelt es sich hierbei um eine Verallgemeinerung der Produktregel der Differentiation?

(b) Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ und $f(t) := \det(\mathrm{e}^{tA})$, $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie durch Anwenden der verallgemeinerten Produktregel

$$(Df)(t_0) = \mathrm{tr}\,(A) \cdot f(t_0),$$

wobei $\mathrm{tr}\,(a_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ die *Spur* einer Matrix $(a_{kl}) \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet.