Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch

WS 2014/2015

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 14.11.2014 bis 10h00, in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Extrema der jeweils auf $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^n$ definierten Funktion f unter den angegebenen Nebebedingungen.

(a) $f(x,y,z) = x + z$ mit der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

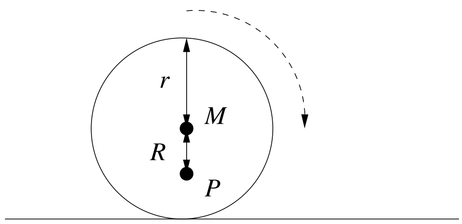
(b) $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^2$ mit der Nebenbedingung $\sum_{j=1}^n x_j = 1$.

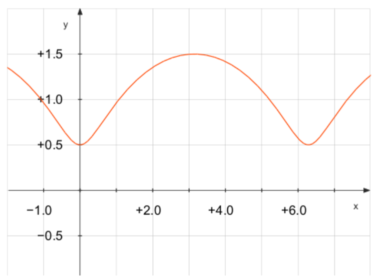
Aufgabe 2. Sei $c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Kurve

$$c(t) = \begin{cases} (t, t\sin\frac{1}{t}) & \text{für } t \neq 0 \\ (0,0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß c stetig ist, aber keine endliche Bogenlänge besitzt.

Aufgabe 3. Ein Rad mit Radius r rolle auf der x-Achse in der xy-Ebene, hierbei bewege sich der Mittelpunkt des Rades mit der konstanten Geschwindigkeit v. Ferner sei P ein fest mit dem Rad verbundener Punkt im Abstand R von M, wobei $0 \leq R \leq r$. Die Punkte P und M befinden sich zur Zeit $t = 0$ auf der y-Achse und P liege unterhalb von M.





(a) Gib eine Parametrisierung der Bahn c von P mit der Zeit t als Parameter an.

(b) Bestimme $\max_t \|c'(t)\|$ und $\min_t \|c'(t)\|$.

(c) Welche Länge besitzt c für $r = R$ nach einer Radumdrehung? (*Hinweis:* Nutze die Gleichung $\cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$.)

Aufgabe 4. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und sei $c \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta])$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} \colon [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (t,q,v) \mapsto q\sqrt{1+v^2},$$

für alle $t \in [\alpha,\beta]$. Zeige:

(a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in (\alpha, \beta)$ gilt:

$$\frac{c(t)c'(t)^2}{\sqrt{1+c'(t)^2}} - c(t)\sqrt{1+c'(t)^2} = -\gamma.$$

(*Hinweis:* Energieerhaltungssatz.)

(b) $c(t) = \gamma\sqrt{1+c'(t)^2}$ für alle $t \in [\alpha, \beta]$.

(Das zugehörige Variationsproblem besteht darin, für eine Kurve zwischen vorgegebene Randpunkten den Oberflächeninhalt der zugehörige Rotationsfläche (bei Drehung um die x-Achse) zu minimieren.)