**Prof. Dr. R. Wulkenhaar**
**I. Ullisch** **WS 2014/2015**

# Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 12.11.2014 bis 10h00, in den Briefkästen Blatt 8

---

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die äußere Ableitung folgender Differentialformen auf $\mathbb{R}^3$ (bzw. $\mathbb{R}^n$):

(a) $x^2dx + ydz$;

(b) $x^2dx \wedge dy + \mathrm{e}^z\, dy \wedge dz$;

(c) $xdx + xydy + xzdz$;

(d) $(x + \sin z)dx \wedge dy + ydx \wedge dz + xyzdy \wedge dz$;

(e) $\mathrm{e}^{xy}\, dx - (\sin y)dy + xdz$;

(f) $(x + \cos y)dy + 3dz$;

(g) $d(d\omega \wedge \zeta - \omega \wedge d\zeta)$,

wobei $\omega, \zeta$ zweimal stetig partiell differenzierbare Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$ seien.

**Aufgabe 2.** Prüfen Sie, ob folgende Differentialgleichungen exakt sind, und geben Sie in diesem Fall einen geschlossenen Ausdruck für $x(t)$ an, falls dies möglich ist:

(a) $(2x\,\mathrm{e}^{x(t)} - 1) + (x^2\,\mathrm{e}^{x(t)} + 1)x'(t) = 0$, $x(1) = 0$;

(b) $2tx(t)^2 + \sqrt{x(t)} + 2t^2x(t)x'(t) = 0$;

(c) $\mathrm{e}^t \sin t + \mathrm{e}^{x(t)} \cos x(t) \cdot x'(t) = 0$;

(d) $(12tx(t) + 3) + 6t^2x'(t) = 0$, $x(1) = 1$.

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \omega$ für folgende $\omega, \gamma$:

(a) $\omega = xdx + xdy + zdz$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ bzw. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\cos^2 t, \sin^3 t, 0)$.

(b) $\omega = ydx + xdy$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

(c) $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, wobei $\gamma$ den Rand des Quadrats mit den Eckpunkten $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ in mathematisch positiver Umlauforientierung parametrisiert. Welches Ergebnis erhält man, falls die Parametrisierung in entgegengesetzter Umlauforientierung erfolgt? Begründung?

**Aufgabe 4.** Seien $\omega \in \Omega^p(U)$ und $\eta \in \Omega^q(U)$ für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) Sind $\omega$ und $\eta$ geschlossen, dann auch $\omega \wedge \eta$.

(b) Sind $\omega$ und $\eta$ exakt, so auch $\omega \wedge \eta$.

(c) Ist $\omega$ geschlossen und $\eta$ exakt, so ist $\omega \wedge \eta$ exakt.

(d) Geben Sie für die exakte 2-Form $df \wedge dg$ eine Stammform an. Formulieren Sie das Ergebnis im $\mathbb{R}^3$ in der Sprache der Vektoranalysis.