Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **WS 2014/2015**

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 19.12.2014 bis 10h00, in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. (a) Untersuchen Sie die Funktionen

$$z\mathrm{Re}(z)\ , \qquad \overline{z}\ , \qquad \frac{z}{|z|}\ \ (\text{für } z \neq 0)\ , \qquad x^3y^2 + \mathrm{i}\,x^2y^3$$

auf Stetigkeit, komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitung in den Punkten, in denen die jeweils gegebene Funktion komplex differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto ax^2 + 2bxy - y^2$ harmonisch ist. (Eine auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ definierte, zweimal stetig differenzierbare Funktion f heißt *harmonisch*, falls $\partial_1^2 f(x) + \partial_2^2 f(x) = 0$ für alle $x \in U$ gilt.)
Geben Sie für diese $a, b \in \mathbb{R}$ jeweils eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ an, deren Realteil gleich f ist.

Aufgabe 2. Entscheiden Sie, in welchem Fall eine im Nullpunkt holomorphe Funktion f existiert mit $f(1/n) = \ldots$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$

(a) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \ldots$

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \ldots$

(c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

Aufgabe 3. Für $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $\alpha_{a;r} : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha_{a;r}(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$. Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\displaystyle\int_{\alpha_{2;1}} dz\, \frac{z^7 + 1}{z^2(z^4 + 1)}$,

(b) $\displaystyle\int_{\alpha_{0;3}} dz\, \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(z + 2)^3}$,

(c) $\displaystyle\int_{\alpha_{1;3/2}} dz\, \frac{z^7 + 1}{z^2(z^4 + 1)}$,

(d) $\displaystyle\int_{\alpha_{0;3}} dz\, \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1}$.

Aufgabe 4. Beweisen Sie für eine ganze Funktion f als Verschärfung des Satzes von Liouville:

(a) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und positive Konstanten R, M, so daß $|f(z)| \leq M|z|^n$ für $|z| > R$, dann ist f ein Polynom vom Grad $\leq n$.

(b) Ist die Funktion $\mathrm{Re}\, f(z)$ beschränkt, so ist f konstant. (*Hinweis*: Betrachten Sie e^f.)