Prof. Dr. R. Wulkenhaar
I. Ullisch **WS 2014/2015**

Übungen zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 23.1.2015 bis 10h00, in den Briefkästen Blatt 12

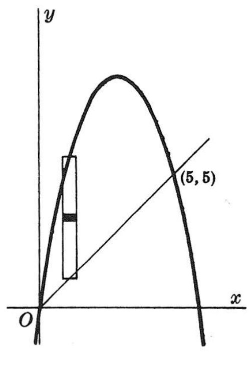
Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Integrale

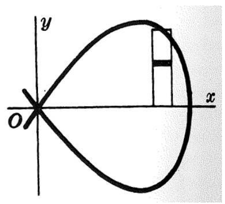
$$\int_{[1,2]\times[3,4]} \frac{d(x,y)}{(x+y)^2}, \qquad \int_{[0,1]\times[0,1]} d(x,y)\,\frac{y}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad \int_B d(x,y)\,\frac{\sin x}{x},$$

wobei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \le y \le x\}$.

Aufgabe 2. (a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Parabel $y = 6x - x^2$ und der Geraden $y = x$ begrenzt wird.

(b) Bestimmen Sie die Trägheitsmomente der von der Schleife $y^2 = x^2(2-x)$ eingeschlossenen Fläche bezüglich der x-Achse und der y-Achse.
Hinweis: Substituieren Sie in den sich ergebenden Integralen $2 - x = t^2$.





Aufgabe 3. Es sei $A := \{(x,y,z) \ : \ (x-R/2)^2 + y^2 \le (R/2)^2\,,\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ der Durchschnitt der Kugel mit Mittelpunkt 0 und Radius R mit dem Zylinder mit Radius $R/2$, dessen Symmetrieachse parallel zur z-Achse durch $(\frac{R}{2},0,0)$ geht.

(a) Berechnen Sie das Volumen von A.

(b) Berechnen Sie für die Dichte $\mu = 1$ die x-Koordinate s_x des Schwerpunkts von A.

Hinweise: Eine sinnvolle Reihenfolge der Integrale ist $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{-y_0(x)}^{y_0(x)} dy \int_{-z_0(x,y)}^{z_0(x,y)} dz$ mit zu bestimmenden Grenzen. Es entsteht $\int_{-y_0(x)}^{y_0(x)} dy \sqrt{f^2(x) - y^2}$, welches durch die Substitution $y = f(x)\cdot \sin t$ gelöst wird. Dabei sind die Grenzen des t-Intgrals zu ermitteln. Im verbleibenden x-Integral substituiert man $x = Ru^2$ und integriert gegebenenfalls partiell.

Aufgabe 4. Für $0 < r \leq R$ sei $A := \{(x, y, z) \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \, , \ x^2+y^2 \geq r^2\}$ die zentrisch durchbohrte Kugel.

Berechnen Sie das Volumen von A und zeigen Sie, daß es nur von der Höhe von A abhängt.

Hinweis: Die Aufgabe läßt sich am einfachsten über das Prinzip von Cavalieri lösen.