Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 15/16

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 10.12.,2015, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 7

Aufgabe 1. Sei $a > 0$, $x_0 \in \left(0, \frac{2}{a}\right)$ beliebig und die Folge $(x_n)_n$ definiert durch

$$x_{n+1} := x_n(2 - ax_n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß $x_n < x_{n+1} < \frac{1}{a}$ für alle $n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/a$ gilt.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ und $(c_n)_n$, gegeben durch

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, 1, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1 + (-1)^n n^2}{3n + n^2}, \qquad c_n = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} + \mathrm{i}^{2n+1}\frac{n-1}{n+2}.$$

Aufgabe 3. Wir setzen ohne Beweis voraus, daß für jede rationale Zahl $s > 0$ die Folge der Zahlen

$$a_n := \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n$$

konvergiert. Zeigen Sie, daß dann $\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}^s$ gilt.
(*Hinweis:* Betrachten Sie geeignete Teilfolgen von $(a_n)_n$ und von $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_n$.)

Aufgabe 4. Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{4}\right)^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{n}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$, (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

und berechnen Sie im Fall der Konvergenz die Reihe.

(*Hinweis:* Erweitern Sie $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1$ mit $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1$ und nutzen Sie in (d) Partialbruchzerlegung.)

Aufgabe N. (4 Zusatzpunkte) Zeichne einen Nikolaus unter ausschließlicher Verwendung von Ziffern, griechischen Buchstaben und mathematischen Symbolen.