

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Aufgaben zur Selbstkontrolle, keine Abgabe

Blatt 15/16

Aufgabe 1. Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie erneut (Blatt 1, Aufgabe 3c) durch vollständige Induktion:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ für alle $n \geq 1$.

(c) Für $n \geq 1$ sei $g_n := \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Geben Sie g_1 und eine Rekursionsformel an, die g_{n+1} durch g_n ausdrückt. Folgern Sie: $\frac{3}{2} \leq g_n \leq 2$ für alle $n \geq 2$.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung (b)+(c):

Es gibt Konstanten $C, M \in \mathbb{R}$ mit $M > 1$, so daß $\left| \frac{g_{n+1}}{g_n} - 1 \right| \leq \frac{C}{M^n}$ für alle $n \geq 1$.

(e) Zeigen Sie mit (c)+(d): $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ ist Cauchy-Folge.

Bemerkung: $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ ist nicht monoton!

(f) Begründen Sie, daß $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^{\times}}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$.

(g) Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R(P)$ der Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$.

(h) Zeigen Sie: $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \frac{z}{1 - z - z^2}$ für $|z| < R(P)$.

Hinweis: Berechnen Sie $(1 - z - z^2)P(z)$.

(i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung $\frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{1 - az} + \frac{B}{1 - bz}$, d.h. geben Sie a, b, A, B an.

(j) Schreiben Sie $\frac{A}{1 - az}$ und $\frac{B}{1 - bz}$ als geometrische Reihen und bestimmen Sie f_n durch Koeffizientenvergleich. Vergleichen Sie mit (a).

(k) Schlußfolgern Sie aus $P(z) = z \sum_{n=0}^{\infty} (z + z^2)^n$ für $|z| < R(P)$ die Identität:

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}.$$

Bemerkung: Es gilt $\binom{m}{k} = 0$ für $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k > m$.