Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 16/17

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe bis Mittwoch, den 2.11.16, 12 Uhr in den Briefkästen — Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $U := \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ und $Q\colon U \to \mathbb{R}^2$ die Polarkoordinaten-Transformation,

$$Q(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Ferner sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $g = f \circ Q$. Zeigen Sie:

(a) Mit $(x,y) = Q(r,\phi)$ gilt

$$(\partial_1 f)(x,y) = \cos\phi \cdot (\partial_1 g)(r,\phi) - \frac{\sin\phi}{r} \cdot (\partial_2 g)(r,\phi),$$
$$(\partial_2 f)(x,y) = \sin\phi \cdot (\partial_2 g)(r,\phi) + \frac{\cos\phi}{r}(\partial_2 g)(r,\phi).$$

[*Hinweis:* Berechnen Sie $((DQ)(r,\phi))^{-1}$.]

(b) Mit $(x,y) = Q(r,\phi)$ gilt $(\Delta f)(r\cos\phi, r\sin\phi) = \partial_r^2 g(r,\phi) + \frac{1}{r}\partial_r g(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2 g(r,\phi)$. (*Hinweis:* Die Rechnung wird übersichtlicher, wenn Sie die Gleichungen aus (a) in folgender suggestiver Kurzform schreiben:

$$\partial_x = \cos\phi \cdot \partial_r - \frac{\sin\phi}{r} \cdot \partial_\phi, \qquad \partial_y = \sin\phi \cdot \partial_r + \frac{\cos\phi}{r} \cdot \partial_\phi.$$

Beachten Sie dabei die Leibniz-Regel!)

Aufgabe 2. (a) Sei $m \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und *homogen vom Grad m* in dem Sinne, daß $f(tx) = t^m f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$. Zeigen Sie, daß dann $\langle x, (\operatorname{grad} f)(x)\rangle = m f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sei $y \in \mathbb{R}^n$ und $g, h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = \cos(\langle y, x\rangle)$ und $h(x) = \sin(\langle y, x\rangle)$. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\operatorname{grad} g = -h \cdot y, \qquad \operatorname{grad} h = g \cdot y, \qquad \Delta u + \|y\|^2 u = 0 \text{ für } u = g \text{ und } u = h.$$

Aufgabe 3. Die *Rotation* eines differenzierbaren Vektorfeldes $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ist definiert als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v = \big(\partial_3 v_2 - \partial_2 v_3,\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1,\ \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2\big) : U \to \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} v$ für $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \big(\mathrm{e}^{x_1+x_2}, \sin(x_2 x_3), x_1 + x_3\big)$.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und seien $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $u, v\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0, \qquad \operatorname{rot}(fu) = f \operatorname{rot} u + (\operatorname{grad} f) \times u,$$
$$\operatorname{div}\operatorname{rot} u = 0, \qquad \operatorname{div}(u \times v) = \langle \operatorname{rot} u, v\rangle - \langle u, \operatorname{rot} v\rangle,$$

wobei $x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)^t$ für $x, y \in \mathbb{R}^3$.

(*Bemerkung:* Man schreibt auch suggestiv $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ als Vektor von Operatoren und erhält dann symbolisch $\nabla f = \operatorname{grad} f$, $\langle \nabla, f\rangle = \operatorname{div} f$, $\nabla \times v = \operatorname{rot} v$. Dann gilt zum Beispiel $\nabla \times (fu) = (\nabla f) \times u + f(\nabla \times u)$.)

Aufgabe 4. Seien $\beta \in \mathbb{N}^n$ ein Multi-Index, $n, d \in \mathbb{N}$ und $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n)^d, \qquad g(x_1, \dots, x_n) = x^\beta$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei für jeden Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^n$

$$\beta - \alpha := (\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n), \qquad \alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_n \leq \beta_n.$$

(a) Berechnen Sie für jeden Multi-Index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ die partiellen Ableitungen $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f$ und $(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha g$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $|\alpha| \leq d$ und $|\alpha| > d$ sowie $\alpha \leq \beta$ und $\alpha \geq \beta$.

(b) Beweisen Sie durch Entwicklung von f und g in Taylorreihen die Gleichungen

$$(x_1 + \cdots + x_n)^d = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ |\alpha| = d} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha, \quad (x + y)^\beta = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n,\ \alpha \leq \beta} \frac{\beta!}{\alpha!(\beta - \alpha)!} x^\alpha y^{\beta - \alpha}.$$