Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 16/17

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21.12.2016, 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 9

Vorbemerkung: Gegenüber der Vorlesung bezeichnen hier x, y, z sowohl die Koordinaten eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ als auch die zugehörigen Koordinatenfunktionen.

Aufgabe 1. (a) Gegeben seien die Differentialformen

$$\omega = xydx + \mathrm{e}^x dy + yzdz, \qquad \upsilon = z^2 dx \wedge dy + dx \wedge dz + \cos x \cdot dy \wedge dz.$$

Berechnen Sie das Keilprodukt $\omega \wedge \upsilon$ und die äußeren Ableitungen $d\omega$ und $d\upsilon$.

(b) Seien v, w Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie (mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 14 der Vorlesung), daß dann $\varrho_1(v) \wedge \varrho_2(w) = \varrho_3(\langle v, w\rangle)$, wobei $\langle v, w\rangle := \sum_{k=1}^3 v_k w_k$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die 1-Form

$$\omega = \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

(a) Ist ω geschlossen?

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ und $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $t \mapsto tv$. Berechnen Sie $\int_c \omega$.

(c) Bestimmen Sie ein Potential von ω.

Aufgabe 3. Berechnen Sie das jeweilige Kurvenintegral $\int_c \omega$ und nutzen Sie dabei nach Möglichkeit Wegunabhängigkeit aus (Potentiale erraten sei erlaubt):

(a) $\omega = (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$ und $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\frac{\pi}{2}t^2, t\right)$.

(b) $\omega = (\mathrm{e}^x \sin y - 2y\sin x)dx + (\mathrm{e}^x\cos y + 2\cos x)dy$ und $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (2\cos t, 3\sin t)$.

Aufgabe 4. Prüfen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit und lösen Sie gegebenenfalls die Differentialgleichung:

(a) $(2t + 3) + (2x(t) - 2)x'(t) = 0$;

(b) $(t^2 + x(t)) - tx'(t) = 0$ für $t > 0$;

(c) $1 + x(t)t^{-2} - x'(t)t^{-1} = 0$ für $t > 0$;

(d) $(2t - x(t)^{-1}) + tx(t)^{-2}x'(t) = 0$.

Bemerkung: Die Variablen (t, x) spielen hier die Rolle von (x, y) aus der Vorlesung.