Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **WS 18/19**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: *Mittwoch*, 31.10.2018 bis 12h00 in den Briefkästen Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 + x - \mathrm{e}^{y_1+2y_2} + \mathrm{e}^{y_1+y_2+x} \\ y_1 + y_2 + x + \frac{1}{2}\sin(y_1 + y_2 + x) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem $F(x, y_1, y_2) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach y_1 und y_2 aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie das maximale Intervall für x, auf dem die Auflösung in (a) möglich ist.

(c) Bestimmen Sie den Tangentialvektor der Lösungskurve aus (a) an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 2. Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x_1, x_2, y) = x_1^4 + 2x_1 \cos x_2 + \sin y = 0$.

(a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $G(x_1, x_2, y) = 0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach y aufgelöst werden kann.

(b) Bestimmen Sie für die Auflösung $y(x_1, x_2)$ aus (a) das Taylorpolynom zweiten Grades an der Stelle $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Aufgabe 3. Sei $0 < r < R$ und $T \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man von $(r+R, 0, 0)$ aus durch Nacheinanderausführung

- einer Drehung um die Achse $x = R, z = 0$ um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ und
- einer Drehung um die z-Achse um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$

erreichen kann.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$, daß $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beschreiben Sie $(x, y, z) \in T$ als Funktionen von ϕ und θ.

(c) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Basis für den Tangentialraum an T an dem durch $\phi = \theta = \pi/4$ bestimmten Punkt.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 1. Sei $f\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch $A \mapsto A^T A - E_n$. Dann ist $O(n) = f^{-1}(0)$ die Gruppen der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $(Df)(A)(BA) = A^T(B + B^T)A$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
(*Hinweis:* Verwenden Sie die Gleichung $((Df)(A))(BA) = \frac{d}{dt} f(A + tBA)\big|_{t=0}$.)

(b) $\operatorname{rang}((Df)(A)) = n(n+1)/2$ für alle $A \in O(n)$.

(c) $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Dimension $n(n-1)/2$ und Kodimension $n(n+1)/2$.

(d) Für $\mathfrak{o}(n) := T_{E_n}(O(n))$ gilt $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X^t = -X\}$.