Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 18/19

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: **Donnerstag**, 20.12.2018 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Residuen:

$$\text{(a)}\quad \operatorname{res}_{\mathrm{i}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\pi z}}{z^4-1}\right) \qquad \text{(b)}\quad \operatorname{res}_{1}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\pi z}}{z^4-1}\right)$$

$$\text{(c)}\quad \operatorname{res}_{1}\left(\frac{z^n}{(z-1)^{k+1}}\right) \qquad \text{(d)}\quad \operatorname{res}_{\mathrm{k}}\left(\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right), \qquad k,n\in\mathbb{N}$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx \qquad \text{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}, \quad n\in\mathbb{N}$$

$$\text{(c)}\ \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a,b>0.$$

Aufgabe 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(a)}\ \int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{(5-3\sin(t))^2} \qquad \text{(b)}\ \int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\cos(t)+a^2}, \quad a\in K_1(0)$$

$$\text{(c)}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(x)dx}{1+x^4}.$$

Aufgabe 4. *(Maximumsprinzip)*
Sei $U\subseteq\mathbb{C}$ offen und $f\colon U\to\mathbb{C}$ holomorph.

(a) Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel, um zu zeigen: Falls $|f|$ in einem Punkt $z\in U$ ein Maximum hat, dann muß f konstant sein.

(b) Sei U beschränkt und f stetig auf dem Rand ∂U fortsetzbar. Begründen Sie, daß f auf $\overline{U}=U\cup\partial U$ ein Maximum hat. Schlußfolgern Sie, daß $|f|$ sein Maximum auf dem Rand ∂U annimmt, also $\sup_{z\in\overline{U}}|f(z)|=\sup_{z\in\partial U}|f(z)|$.

(c) Sei $f: U\to\mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant und stetig auf den Rand ∂U fortsetzbar. Auf dem Rand ∂U sei f konstant. Zeigen Sie, daß f in U eine Nullstelle hat.